COORDINACIÓN EDUCATIVA Y CULTURAL CENTROAMERICANA

Colección Pedagógica Formación Inicial de Docentes Centroamericanos de Educación Primaria o Básica

Lo Difícil Hecho Fácil Matemática para la Formación de Docentes de Educación Primaria

Mayra Castillo de Carvajal
Julio Eduardo Castillo M.

VOLUMEN 23

CECC/SICA
Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana

372.7
C352-l Castillo de Carvajal, Mayra
Lo Difícil hecho fácil : matemática para la formación de docentes de educación primaria / Mayra Castillo de Carvajal, Julio Eduardo Castillo. – 1ª. ed. – San José, C.R. : Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana, CECC/SICA, 2009.
140 p. : il. ; 28 x 21 cm. – (Colección Pedagógica Formación Inicial de Docentes Centroamericanos de Educación Básica; N° 23)

ISBN 978-9968-818-70-4

1. Matemática – Estudio y enseñanza. 2. Capacitación de docentes. I. Castillo Julio Eduardo. II. Título.

CRÉDITOS

La elaboración y publicación de esta colección fueron realizadas con la contribución económica del Gobierno Real de los Países Bajos, en el marco del **Proyecto Consolidación de las Acciones del Mejoramiento de la Formación Inicial de Docentes de la Educación Primaria básica, CECC/SICA**

María Eugenia Paniagua Padilla
Secretaria General de la CECC/SICA

Juan Manuel Esquivel Alfaro
Director del Proyecto

Mayra Virginia Castillo de Carvajal
Julio Eduardo Castillo Montes
Autores del Texto

Olga González Dobles
Revisión y Asesoría de Contenido

Julio Eduardo Castillo M.
Levantado de texto

Sandra de Echeverría
Diseño del Texto

Arnobio Maya Betancourt
Coordinador y Asesor de la 1ª
Edición Final y de la Reimpresión

Impresión Litográfica
Editorama, S.A.

Para la impresión de esta 2ª. edición, (1ª. aún para el registro del ISBN) se ha respetado el contenido original, la estructura lingüística y el estilo utilizado por los autores, de acuerdo con un contrato firmado para su producción por éstos y la Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana, CECC/SICA.

PRESENTACIÓN

A finales del año 2002 y comienzos del 2003, así rezan los respectivos colofones, **la Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana, (CECC/SICA),** publicó y entregó treinta y seis interesantes obras que estructuraron la **Colección Pedagógica Formación Inicial de Docentes Centroamericanos de Educación Primaria o Básica.**

Dichas publicaciones se originaron en el marco del **Proyecto Apoyo al Mejoramiento de la Formación Inicial de Docentes de la Educación Primaria o Básica,** el que se generó y se puso en ejecución, merced al apoyo que ha brindado la Cooperación Internacional del Gobierno Real de los Países Bajos.

Para desarrollar dichas obras, la CECC/SICA realizó una investigación diagnóstica en los países que forman parte orgánica de la institución, la cual permitió identificar, con mucha claridad, no sólo las temáticas que serían abordadas por los autores y autoras de las obras de la Colección, sino también las estrategias que debían seguirse en el proceso de diseño y producción de la misma, hasta colocar los ejemplares asignados en cada uno de los países, mediante sus respectivos Ministerios o Secretarías de Educación.

Los mismos materiales trataron de responder a los perfiles investigados de los formadores y de los maestros y de las maestras, así como a los respectivos planes de estudio.

Como podrá visualizarse en la información producida en función del Proyecto, cuyo inicio se dio en Diciembre de 1999, los programas que se han implementado en el marco del mismo son los siguientes:

1º. Desarrollo del perfil marco centroamericano del docente de Educación Primaria o Básica para mejorar el currículo de formación inicial de docentes.

2º. Mejoramiento de la formación de formadores de docentes para la Educación Primaria o Básica.

3º. Producción de recursos educativos para el mejoramiento del desarrollo del currículo de formación inicial de docentes de la Educación Primaria o Básica.

4º. Innovaciones pedagógicas.

5º. Investigación Educativa.

La Colección publicada y distribuida, a la que aludimos, pretende ofrecer a los países obras didácticas actualizadas e innovadoras en los diferentes temas curriculares de la Educación Primaria o Básica, que contribuyan a dotar de herramientas estratégicas, pedagógicas y didácticas a los docentes Centroamericanos para un eficaz ejercicio de su práctica educativa.

Después de publicada y entregada la Colección a los países destinatarios, la CECC/SICA ha hecho el respectivo seguimiento, el cual muestra el acierto que, en alta proporción, ha tenido la organización, al asumir el diseño, la elaboración, la publicación y su distribución.

Basada en estos criterios, es como la CECC/SICA y siempre con el apoyo de la Cooperación Internacional del Gobierno Real de los Países Bajos, ha decidido publicar una segunda edición de la colección (36 volúmenes) y a la cual se le suma un nuevo paquete de 14 volúmenes adicionales, cuya presentación de la 1ª edición se hace en éstos, quedando así constituida por 50 volúmenes.

Nuevamente presentamos nuestro agradecimiento especial al Gobierno Real de los Países Bajos por la oportunidad que nos brinda de contribuir, con esta segunda edición de la Colección, a la calidad de la Educación Primaria o Básica de la Región Centroamericana y República Dominicana.

MARIA EUGENIA PANIAGUA
Secretaria General de la CECC/SICA

PRESENTACIÓN DE LA PRIMERA EDICIÓN

En los últimos años, la Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana (CECC) ha venido ejecutando importantes proyectos que, por su impacto y materia, han complementado los esfuerzos ministeriales por mejorar y modernizar la Educación . Los proyectos de más reciente aprobación, por parte del Consejo de Ministros, están direccionados a enfrentar graves problemas o grandes déficits de los sistemas educativos de nuestra región. Este es el caso de Proyecto **" Apoyo al Mejoramiento de la Formación Inicial de Docentes de la Educación Primaria o Básica"**, cuyo desarrollo ha conducido a una exhaustiva revisión de los diversos aspectos relacionados con la formación de los maestros. Sus resultados son evidentes en cada país y con ello la CECC cumple su finalidad de servir cada vez mejor a los países miembros.

En este caso, ha de recordarse que este valioso proyecto es el producto de los estudios diagnósticos sobre la formación inicial de docentes ejecutados en cada una de las seis repúblicas centroamericanas en el año 1966, los cuales fueron financiados con fondos donados por el Gobierno de los Países Bajos. Entre las conclusiones y recomendaciones formuladas en el Seminario Centroamericano, una de las actividades finales del estudio indicado, el cual fue realizado en Tegucigalpa, Honduras, en septiembre de ese mismo año, los participantes coincidieron plenamente en poner especial atención a la formación de los formadores y en promover la "tercerización" de la formación de los maestros donde no existiere. También, hubo mayoría de opiniones sobre la necesidad de establecer perfiles del formador y de los maestros y respecto a la actualización de los respectivos planes de estudio. Por consiguiente, es apropiado afirmar que el contenido de este proyecto, orientado a mejorar la formación inicial de docentes, se sustenta en los seis diagnósticos nacionales y en el informe regional que recoge los principales resultados del Seminario Regional y la información más útil de los informes nacionales.

Como consecuencia del trabajo previo, explicado anteriormente, y de las conversaciones sostenidas con los funcionarios de la Embajada Real sobre los alcances y el presupuesto posible para este proyecto, finalmente se aprobó y dio inicio al mismo en diciembre de 1999 con los siguientes programas:

1. **Desarrollo del perfil marco centroamericano del docente de Educación Primaria o Básica para mejorar el currículo de formación inicial de docentes.** Con base en este perfil se construyeron los perfiles nacionales, los que sustentaron acciones de adecuación de los currículos de formación inicial de docentes en cada país.
2. **Mejoramiento de la formación de formadores de docentes para la Educación Primaria o Básica.** Con el propósito de definir perfiles académicos de los formadores de docentes que den lugar a planes de estudio de grado y de postgrado.
3. **Producción de recursos educativos para el mejoramiento del desarrollo del currículo de formación inicial de docentes de la Educación Primaria o Básica.** Dirigido a editar obras bibliogáficas y a producir materiales interactivos que se empleen en las aulas de formación de maestros.
4. **Innovaciones pedagógicas.** Consistente en poner en práctica y evaluar innovaciones pedagógicas en el campo de la formación inicial y en servicio de docentes.
5. **Investigación Educativa.** Desarrollo de investigaciones sobre temas dentro de la formación inicial de los docentes del Nivel Primario.

Es oportuno destacar cómo la cooperación financiera y técnica del Gobierno de los Países Bajos, a través de su Embajada Real en San José, Costa Rica, ha sido no solo útil a los Ministerios de Educación del Área, por centrarse en uno de los factores determinantes de la calidad de la Educación, sino también porque ha permitido, en dos momentos, completar una propuesta de trabajo que ha impactado y que ha abierto nuevas vertientes de análisis y reflexión de la formación inicial de docentes para la Educación Primaria.

Con esta Presentación se quiere exaltar la importancia y trascendencia del Programa 3, en el que se enmarca la elaboración de las obras bibliográficas, orientadas a solventar, en alguna medida, la falta de disponibilidad de textos referenciales de actualidad en el campo educativo, que contribuyan a elevar la calidad de la formación profesional de los maestros y la de sus formadores, donde ello sea una necesidad. Además, de que la colección se pone en manos de quienes forman educadores para la Educación Primaria y de los estudiantes de pedagogía. Todo esto es producto del conocimiento y la experiencia de profesionales centroamericanos que han consagrado su vida a la educación y al cultivo de los diversos saberes. Llegar a la definición de las obras y sus títulos fue un largo y cuidadoso proceso en el que intervinieron diversos profesionales de la región, de acuerdo con el concurso establecido y publicado para tales efectos.

Es importante apuntar que las obras que integran esta colección de valor incalculable, cubren los principales temas curriculares y técnico-pedagógicos que deben acompañar a un adecuado proceso de formación inicial de docentes. Por ello, van desde los temas fundamentales de Educación, el Currículo, Ejes Transversales, la Didáctica, la Evaluación, la Supervisión y Administración Educativa, hasta temas metodológicos y estratégicos específicos relacionados con el conocimiento teórico y con la enseñanza de la Ciencias Sociales, la Matemática, las Artes, el Lenguaje, las Ciencias Sociales y la Investigación Educativa. En su elaboración se siguió un proceso de amplia participación, dentro del cual se recurrió a jueces que analizaron las obras y emitieron sus comentarios y recomendaciones enriquecedores en algunos casos y correctivos en otros. En este proceso, los Ministerios de Educación de la región tuvieron un papel fundamental al promover dicha participación.

Esta Secretaría General considera que la rica colección, por la diversidad temática, visión y actualidad, es un aporte sustantivo, muy visible, manejable y de larga duración, que el Gobierno de los Países Bajos, a través de la CECC, le entrega gratuitamente a las instituciones formadoras de educadores y a las dependencias de los Ministerios de Educación, encargadas de este campo. Del buen uso que hagan formadores y formados del contenido de esta colección de obras, va a depender, en definitiva, que el esfuerzo de muchos profesionales, realizado en el marco de la CECC, genere los resultados, el impacto y las motivaciones humanas y profesionales de quienes tendrán en las aulas centroamericanas el mayor tesoro, la más grande riqueza, de nuestras naciones: las niñas y los niños que cursan y cursarán la Educación Primaria. El aporte es objetivo. Su buen uso dependerá de quienes tendrán acceso a la colección. Los resultados finales se verán en el tiempo.

Finalmente, al expresar su complacencia por la entrega a las autoridades de Educación y al Magisterio Centroamericano de obras tan valiosas y estimulantes, la Secretaría General resalta la importancia de las alianzas estratégicas que ha logrado establecer la CECC, con países y agencias cooperantes con el único espíritu de servir a los países del Área y de ayudar a impulsar el mejoramiento de la educación en los países centroamericanos. En esta ocasión, la feliz alianza se materializó gracias a la reconocida y solidaria vocación de cooperación internacional del Gobierno de los Países Bajos y, particularmente, a los funcionarios de la Embajada Real, quienes con su apertura, sensibilidad y claridad de sus funciones hicieron posible que la CECC pudiese concluir con tanto éxito un proyecto que nos deja grandes y concretas respuestas a problemas nuestros en la formación de maestros, muchas enseñanzas y deseos de continuar trabajando en una de las materias determinantes para el mejoramiento de la calidad de la Educación.

MARVIN HERRERA ARAYA
Secretario General de la CECC

CONTENIDO

Orientación para la elaboración del Texto Paralelo

En la presente obra, la idea central es promover el aprendizaje de la matemática, tanto de los futuros docentes como de los alumnos del nivel primario.

Nuestra visión de aprender implica forzosamente la actividad orientada y deliberada tanto del que enseña como del que aprende.

Como evidencia de los logros alcanzados por el que aprende, en lugar del cuaderno tradicional de trabajo, la obra se orienta a la escritura de un Texto Paralelo.

Esta técnica consiste en la elaboración de un documento personal, que incluya además de la realización de actividades y ejercicios propuestos, registro de las dificultades, reflexiones, experiencias, opiniones, investigaciones, satisfacciones, etc., que den testimonio del aprendizaje realizado.

Por ser un documento escrito, permite al que aprende analizar y reflexionar acerca de su propia actuación durante todo el proceso.

Para estructurar cada capítulo de su texto personal, le proponemos que destaque al menos tres partes: introducción, realización de actividades y sugerencias de trabajo, por último comentario un personal.

En la introducción puede incluir su opinión acerca de los conocimientos que posee del tema, expresar qué espera aprender, etc.

En el desarrollo de las actividades, tiene la libertad de incluir gráficas, recortes, fotografías, comentarios, modificaciones, críticas; todo lo que considere necesario para evidenciarle a usted y a las personas que leerán el documento, su vivencias de aprendizaje.

Al cerrar cada capítulo incluya un comentario personal sobre lo experimentado.

Cuando finalice el estudio de la obra, analice sus experiencias y logros alcanzados; termine su documento con un comentario general sobre la técnica del Texto Paralelo.

Introducción

Durante varios años de experiencia como profesores de Matemática y formadores de docentes, hemos enfrentado múltiples, variados y persistentes obstáculos para el aprendizaje de esta asignatura.

Conjuntamente con muchos maestros guatemaltecos hemos sistematizado experiencias que han mostrado ser eficaces para ayudarnos a plantear solución a la problemática que vivimos.

Parte de esa experiencia es la que ponemos a disposición de los estudiantes de magisterio de la región centroamericana, con la clara visión de que nuestro trabajo constituye una propuesta que está sujeta a discusión y por lo tanto, es susceptible de ser mejorada.

La obra consta de seis capítulos, en los que se desarrollan temas cuya problemática de enseñanza y aprendizaje ha mostrado ser más aguda.

Aunque en el tratamiento de los temas se identifican ejes de orientación global, los capítulos pueden estudiarse independientemente. En cada uno, el lector encontrará una sección de actividades destinadas a su propia formación matemática y otra destinada a prepararle para el trabajo en las aulas, tanto durante la realización de su práctica docente, como en su futuro desempeño como maestro.

Todos los capítulos incluyen, al final, una sección que propone actividades integradoras de los conocimientos y habilidades desarrollados.

Nuestra meta es fomentar en los maestros su compromiso por mejorar la educación matemática, transformando su entorno de incidencia más cercano: el salón de clase.

Con la plena confianza en el entusiasmo y capacidad de los estudiantes de magisterio y los maestros en servicio, sometemos a su consideración nuestra propuesta de trabajo.

Los Autores

CAPÍTULO I

REFLEXIONES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN LA ESCUELA PRIMARIA

INTRODUCCIÓN

En los últimos años los profesores e investigadores centran su atención en la búsqueda de estrategias que generen y mantengan el interés y gusto por aprender matemática.

Este hecho tiene especial relevancia en el nivel primario, pues la calidad que posean las primeras experiencias de aprendizaje, determinará en buena medida la formación de actitudes de aceptación o rechazo y la fijación de ideas acerca de la naturaleza y utilidad de la matemática.

Durante nuestra experiencia como docentes, descubrimos que se generan mejores experiencias de aprendizaje cuando la clase se diseña tomando en cuenta los intereses, necesidades, características generales y particularidades de los alumnos.

Lo anterior implica basarse en las experiencias previas de los estudiantes y utilizar el contexto como fuente de aprendizaje; pero ante todo, que el trabajo en el aula gire en torno al centro de atención principal de los niños: *el juego*.

Los requerimientos del mundo cambiante en el que vivimos, evidencian la necesidad de reflexionar acerca de los principios generales que rigen la enseñanza de la matemática y que se proponen para revisión en este capítulo.

Como docentes en formación o en servicio, el proceso de reflexión propuesto incluye la revisión de la validez y profundidad de conocimientos matemáticos y sicopedágogicos, actitud personal hacia la matemática, indagación del entorno laboral, etc..

Lo anterior no es un fin en sí mismo, es un elemento esencial para que los docentes se involucren en la búsqueda de soluciones a problemáticas de aprendizaje que usualmente enfrentan en la clase de matemática.

Estos aspectos constituirán uno de los ejes transversales de la obra, ya que nuestra experiencia en programas de formación inicial y contínua de maestros, nos ha mostrado que los procesos de cambio sólo tienen éxito cuando los profesores reflexionan acerca de la labor que realizan y se comprometen con su auto-perfeccionamiento, con miras a mejorar la calidad de la docencia que ejercen.

ACTIVIDADES PARA EL DOCENTE

¿POR QUÉ ES IMPORTANTE APRENDER MATEMÁTICA?

Previo a responder esta interrogante, se presentan algunas situaciones en las que se utiliza la matemática:

- Actividad de compra-venta.
- Depósito o retiro de dinero en cuentas de ahorro.
- Cálculo del número de gotas de suero por minuto que deben administrarse a un enfermo, si en total debe recibir 50 mililitros por cada kilogramo de peso, y se requiere que el tiempo total sea de 6 horas.
- Confección de ropa a la medida.
- Determinación de la constante de un resorte.
- Demostrar la inocencia de un acusado.
- Mezclar químicos para fumigar una plantación.
- Determinar la ruta de vuelo de una nave espacial.
- Construcción de una casa.

Puede notarse que en la realización de las actividades anteriores, la matemática es una herramienta indispensable y que la escuela primaria forma seres que pueden encontrarse en esas y muchas otras situaciones, las cuales corresponden a:

* Ejercicio de profesiones

  Medicina
  Abogacía
  Contabilidad
  Ingeniería
  Arquitectura
  Agronomía, etc..

* Ejercicio de diversos oficios

  Sastre o modista.
  Comerciante.
  Transportista
  Constructor
  Agricultor, etc..

* Trabajo de los científicos.

Las respuestas obtenidas de distintos grupos de docentes pueden resumirse en las siguientes:

* Es útil para resolver problemas.
* Desarrolla el razonamiento.
* Es útil para el estudio de otras ciencias.
* Proporciona un lenguaje para comunicarse.

Le proponemos que inicie la elaboración de su Texto Paralelo, con las siguientes actividades.

Actividad 1

Importancia de la matemática.

a. Enumere cinco razones por las que para usted es importante aprender matemática.
b. Enumere cinco razones por las que considere es importante para los niños de su comunidad aprender matemática.
c. Pregunte a cinco niños: ¿por qué es importante aprender matemática?
d. Pregunte a cinco miembros de su comunidad: ¿cómo utiliza la matemática en la labor que desempeña?
e. Reúnase con dos compañeros (as) y comparta sus opiniones anteriores.
f. Sinteticen la visión del grupo y coméntenla con integrantes de otros grupos.

Actividad 2

Recuerde tres clases de matemática que recibió y describa lo siguiente:

a. Principales actividades que realizaron maestros y alumnos.
b. Ejemplos que presentó el maestro.
c. La forma en que se promovió el razonamiento.
d. Forma en que se relacionó el tema con contenidos de otras materias.
e. ¿Qué aspectos recomienda que deben mejorarse?
f. Escriba que sugiere para mejorar las clases descritas.

Actividad 3

Reporte de visita.

Visite la escuela en la que realizará su práctica docente u otra que le sea accesible. Incluya en su reporte:

a. Recursos didácticos con que cuenta la escuela.
b. Condiciones generales de las aulas: iluminación, ventilación, pizarrones, etc..
c. Indague con algunos maestros acerca de las principales características socioculturales de los alumnos.
d. Indague cuáles son los puntos críticos de aprendizaje en la clase de matemática.
e. Pregunte a los maestros qué actividades realizan para enfrentar la problemática detectada.
f. Comparta sus hallazgos con otros compañeros(as).
g. Identifique los aspectos que requieren mejoramiento y proponga soluciones.

¿PARA QUÉ ENSEÑAR MATEMÁTICA?

En vista de que la sociedad de hoy requiere que los individuos posean capacidades altamente desarrolladas para aprender rápida y continuamente, trabajar en equipo, interpretar información, etc., en las últimas décadas a nivel de regiones y de países, se han impulsado acciones tendientes a reorientar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el nivel primario.

Como fruto de estas acciones, se generan lineamientos como los dados por el Concilio Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos, la Asociación Americana para el Desarrollo de la Ciencia, el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa y la Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana, los cuales se orientan hacia aspectos como:

- Promover la valoración de la matemática.
- Vincular la matemática escolar con la vida de los estudiantes.
- Favorecer la comunicación a través del lenguaje matemático.
- Enfatizar el planteo, modelación y resolución de problemas.
- Enfatizar el desarrollo de habilidades de pensamiento así como hábitos, valores y actitudes.

Nuestra interpretación de lo anterior nos conduce a generar en las aulas espacios en los que se privilegia la realización de actividades que implican: requerir y dar explicaciones, efectuar conjeturas, formular hipótesis, analizar información, realizar cálculos estimados, aproximados, ejercitar el cálculo mental y con calculadoras, etc.

MODELO PROPUESTO PARA ENSEÑAR MATEMÁTICA

Las actividades sugeridas a lo largo de la obra, enfatizan el desarrollo de habilidades en procesos como: clasificación, ordenación, abstracción, generalización, representación, argumentación, juicio crítico, etc.. Asimismo, implican el fomento de actitudes como: perseverancia, aceptación de visiones alternativas sobre el mismo aspecto, respeto etc. y generar un espacio en el cual tanto maestros como alumnos se atrevan a explorar, equivocarse y a aprender de sus errores,

La intencionalidad de concretar los cambios propuestos en el nivel de las aulas, implica una transformación en las concepciones de maestros y estudiantes respecto a la matemática, su enseñanza y su aprendizaje.

El problema está muy lejos de estar resuelto, pero los resultados que hemos obtenido junto a grupos de maestros de primaria, nos llevan a vislumbrar que los mismos docentes pueden y deben contribuir a plantear soluciones factibles de implementar en el ámbito en que laboran .

Como medio para concretar en las aulas lo expuesto anteriormente,se adopta el modelo[1] siguiente:

LA MATEMATICA COMO HERRAMIENTA PARA RESOLVER PROBLEMAS

Es importante no perder de vista que los niños que hoy son formados, serán los adultos del futuro, una era caracterizada por la tecnología y la información.

El hecho anterior y los retos impuestos por la búsqueda de la consolidación de una cultura de paz, tan esencial para nuestros pueblos, requiere de individuos con capacidades especiales como: observar, escuchar, explicar, trabajar en equipo, planificar, elaborar propuestas alternativas, evaluar opciones, etc..

En síntesis, se requiere de personas preparadas para resolver problemas de diversa índole.

En general, los contenidos de la asignatura de matemática están diseñados de manera que la aplicación de los conocimientos adquiridos se encuentre al final de cada unidad. Sin embargo, es también usual que las limitaciones en el tiempo disponible provocan que esta etapa se realice con poca profundidad.

Es por eso que la propuesta reflejada en el esquema anterior se considera innovadora, pues propone la adquisición de los conocimientos que permitan resolver diferentes situaciones problema.

Se considera que la matemática es una poderosa herramienta para el planteo, modelación, solución y optimización de la solución de diversos problemas, pero estos procesos no son fáciles ni inmediatos de desarrollar, por lo cual, es esencial la constancia de los docentes en involucrar a los alumnos en actividades que requieran el trabajo perseverante tanto individual como en equipo.

1. Moreno, J& Segura, D. (1997). Planteaminetos en Educación, Bogota

EL RAZONAMIENTO EN LA CLASE DE MATEMÁTICA

Es importante recordar que se considera que una las razones fundamentales para aprender matemática, es "porque conlleva el desarrollo del razonamiento".

¿Cuáles son las principales manifestaciones de que los alumnos están razonando?
Algunas respuestas que los maestros proponen a esta pregunta son:

- √ Exploran.
- √ Explican.
- √ Proponen soluciones.
- √ Comparan.
- √ Analizan información.
- √ Argumentan.
- √ Detectan y corrigen errores.

En consecuencia, el aula debe convertirse en un lugar en el cual los alumnos realicen estas y otras actividades. Además, se evidencia la importancia de contextualizar y adecuar las experiencias que se propongan, de acuerdo con las características del pensamiento de los niños en las distintas etapas de su desarrollo.

Generalmente, razonar significa pensar correctamente. Al respecto Pablo Freire[2] expresa en una de sus obras: "Sólo puede enseñar a pensar correctamente, quien piensa correctamente". El siguiente capítulo se dedica exclusivamente al tratamiento de este tema.

OPERATORIA

Sin duda una de las más notorias aplicaciones de la matemática es la ejecución de algoritmos para encontrar resultados de operaciones. Es innegable que en la vida real, la realización de cálculos se origina en la necesidad de resolver problemas, siendo inusual que se realicen operaciones sólo porque sí.

Cuando se habla de fortalecer los vínculos entre la vida real y el trabajo escolar, uno de los aspectos incluidos es justamente el descrito. Además de adquirir destreza en la ejecución de algoritmos como medio para resolver problemas, consideramos de suma importancia fortalecer los aspectos conceptuales que doten de significado a los procedimientos utilizados, de manera que su dominio no se apoye exclusivamente en la memoria.

Respecto a la realización de cálculos, consideramos necesario enfatizar varios aspectos:

1. La importancia de explorar las estrategias personales que los niños utilizan para realizar operaciones, valorarlas y tomarlas como base para el conocimiento que se busca construir.

1. Freire Pablo. Pedagogía de la Autonomia. Ediciones Siglo Ventiuno. España, 1997

2. Fomentar el desarrollo de estrategias de cálculo mental, realizar estimaciones y aproximaciones.

3. Si los niños cuentan con calculadoras, no rehuir su uso sino orientarlo de manera que ayude a descubrir propiedades, elaborar conjeturas, etc.

CREATIVIDAD

Los niños en general, poseen un gran potencial de imaginación y talento creativo, que debe aprovecharse para el trabajo matemático en la escuela.

La innata e inagotable curiosidad debe encausarse de modo que sus preguntas, observaciones y suposiciones, les permita construir versiones personales de soluciones a una misma situación.

Consideramos de vital importancia fomentar que los niños construyan y expliquen sus propios ejemplos, que enfrenten situaciones diversas que permitan su expresión personal, que se sientan libres y seguros de que no serán censurados si se equivocan; pero ante todo, que descubran que la matemática es una ciencia viva que puede reconstruirse.

Por otra parte, cuando el reto es el desarrollo de la capacidad de aprender, también la creatividad de los docentes se incentiva a través de la búsqueda continua de estrategias de enseñanza y su adaptación a las condiciones específicas en que se labora.

MODELACIÓN

Aunque el término es relativamente nuevo, la modelación es una de las principales funciones de la matemática. Se refiere a la representación de la realidad planteada en una situación problema, a través de modelos concretos, gráficos, simbólicos, etc, identificando variables, constantes, restricciones y datos desconocidos, lo más similarmente posible con la realidad.

La representación de los elementos de una situación problema, por una parte permite el diseño de un plan para abordar su solución y por otra, establecer la validez de las soluciones propuestas e identificación de la solución óptima.

Muchos estudios y experiencias de aula evidencian la necesidad de que los niños construyan distintos modelos para una misma situación y la efectividad que esto tiene en el desarrollo de la abstracción y la simbolización.

Después de analizar individualmente los elementos conjugados en el modelo propuesto en la figura, de la página 7, a manera de ilustración se presenta la solución de una situación problema para la cual le sugerimos que construya su propia solución.

Ejemplo A

Se ha invitado a los padres de 30 alumnos de magisterio a un almuerzo escolar. Se decide formar una sola mesa rectangular pero se alquilan sólo mesas cuadradas para cuatro personas.

Es necesario determinar cuántas mesas y cuántas sillas alquilar para ubicar a los asistentes cómodamente.

Se sugiere leer detenidamente el problema (varias veces si es necesario), hasta cuando se comprenda su contenido, qué se busca, etc.

Una estrategia inicial en la resolución de problemas, es extrar la información relevante dada en el enunciado del problema.

Datos desconocidos: número de personas que asistirán al almuerzo.

Restricciones:

1. Debe formarse una sola mesa rectangular.

2. Se dispone solamente de mesas cuadradas para cuatro personas.

3. Las personas deben ubicarse cómodamente.

Preguntas del problema: cuántas sillas y cuántas mesas alquilar.

Aunque aún no se intenta la solución del problema, la organización de la información permite su mejor compresión.

Estrategia: unir las mesas cuadradas para formar una rectangular.

De las preguntas planteadas en el problema, lo más inmediato es determinar el número de sillas. Como se desconoce cuántas personas asistirán, se estima que la asistencia máxima será de 2 padres de cada alumno, aceptando como más conveniente que sobren lugares a que falten.

Como son 30 alumnos, a lo sumo serán 60 personas y por lo tanto, debe alquilarse ese número de sillas.

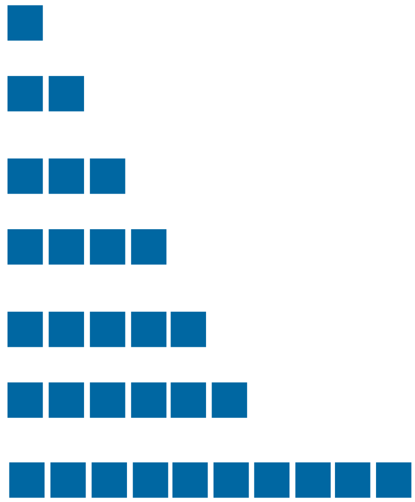
La suposición de que asistirán los dos padres de los 30 alumnos, reduce el problema a determinar el número de mesas que deben unirse para acomodarlos.

Para visualizar mejor la situación, se representa por medio del siguiente modelo:

# de mesas	# de personas
1	4
2	6
3	8
4	10

Complete los datos para:

5	?
6	?
10	?



El modelo permite detectar, que por cada mesa que se agregada, se pueden acomodar dos personas más.

También se evidencia algo que ya se conocía: el número de personas que puedan acomodarse, depende del número de mesas que se alquile. Por lo tanto, se busca una expresión que los relacione.

Para encontrarla, observe la estructura del número de mesas en cada caso:

$$6 = 2 + 2(2)$$
$$8 = 2 + 2(3)$$
$$10 = 2 + 2(4)$$
$$20 = 2 + 2(9)$$

¿Qué representa el número que está dentro del paréntesis? ¡ El número de mesas! Este número podemos simbolizarlo de muchas formas, por ejemplo por m.

En consecuencia, se determinó el número de personas que pueden acomodarse en m mesas es:

$$2 + 2\,(m)$$

Como se supone que serán 60 personas, se tiene la expresión: $2 + 2(m) = 60$

¿Recuerda cómo se llama esa expresión y cómo se resuelve?

– Rescribiendo la expresión se obtiene:

$$2 + 2(m) = 2 + 58$$

- Sabemos que si restamos 2 en ambos lados, la igualdad se mantiene:

$$2(m) = 58$$

- Es inmediato que: m = 29

Conclusión: deben alquilarse 29 mesas

Si finalmente asistieron 43 personas ¿cuántas mesas se alquilaron de más? → ______

La forma de modelar un problema depende de la interpretación que de él se haga, por lo tanto, el proceso va adquiriendo un carácter personal. Sin embargo, hay ideas generales que pueden ser aprendidas y enseñadas a los alumnos y que desarrolladas adecuadamente, se convierten en parte importante de la resolución de problemas.

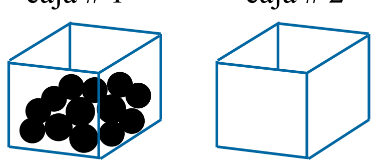
Los esquemas gráficos son muy utilizados en la modelación, debido a su fácil construcción.

Ejemplo B

De 100 bolas negras disponibles, Jaime recibe 48 en una caja mientras que Marcela recibe una caja vacía.
Cada vez que Jaime extrae dos bolas, Marcela introduce cuatro. Continúan el proceso hasta cuando ambos tienen igual número de bolas en sus cajas. ¿Cuántas bolas tienen al final cada uno?

Solución propuesta :

caja # 1 caja # 2

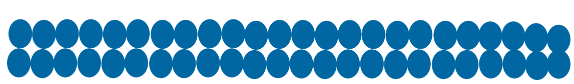


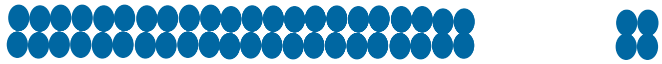
48 bolas vacía

Condiciones:
– Se extraen dos bolas de la caja # 1 y se introducen cuatro en la caja # 2.

– Las contidades finales en las dos cajas deben ser iguales.

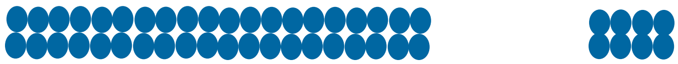
Inicio

Caja # 1	Caja # 2	Diferencia
		48
48 bolas	0 bolas	



42

46 bolas 4 bolas



36

44 bolas 8 bolas

Puede notarse que en cada extracción de bolas de la caja 1 e introducción en la caja 2, la diferencia entre el número de bolas disminuye en 6. Entonces, el problema consiste en determinar cuántas veces debe disminuirse en 6 seis la diferencia, para que el número de bolas sea el mismo, es decir, para que la diferencia sea cero.

Resulta inmediato que debe disminuirse 6, ocho veces, ya que 6 *8 = 48. Ahora bien, en cada una de las ocho veces, de la caja 1 se extraen dos bolas, las cuales totalizan l6; quedando 48 – 16 = 32. En la caja 2, se introducen 4*8 = 32 bolas, satisfaciendo la condición de igualdad

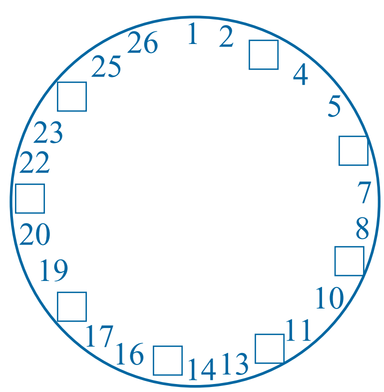
Ejemplo C

Veintiséis alumnos de magisterio harán una actividad que precisa de dos grupos. Para dividirse forman un círculo, uno empieza a contar incluyéndose y cada vez que cuenten tres, sale uno.
Los trece primeros que salgan forman un grupo y los que queden forman el otro. El que inicia el conteo es un chico, las trece chicas se confabulan para quedar juntas y se colocan en las posiciones adecuadas.

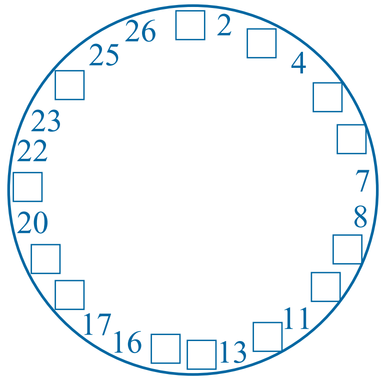
¿Qué posiciones ocuparon las chicas?

Solución propuesta

En la primera vuelta salen los ocho que están en las posiciones: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 y 24.



En la segunda vuelta, salen las cinco personas que están en las posiciones: 1, 5, 10, 14 y 19



Puesto en que entre las trece personas que salieron del grupo, está la que ocupaba la posición 1, que era un chico, puede deducirse que las chicas ocuparon las posiciones de las que no salieron, siendo estas: 2, 4, 7, 8, 11, 13, 16, 17, 20, 22, 23, 25 y 26.

Los chicos se enfadaron y propusieron un nuevo sorteo, contando ahora de cuatro en cuatro, con el mismo resultado. ¿Qué posiciones ocuparon de nuevo las chicas?

Le proponemos que determine las posiciones que ocuparon las chicas en el segundo conteo.

Ejemplo D

El jefe de la expedición que buscaba el Titanic, trabajó durante una semana explorando los restos en las profundidades marítimas.

Como pago por el trabajo realizado, durante los siete días, recibiría un lingote de oro como el mostrado. En vista de lo peligroso de la misión, el buzo pidió que se le pagara diariamente, pero sólo aceptaba oro.

Si sólo se podían hacer dos cortes en el lingote, ¿cómo hizo el contratista para pagarle diariamente el salario de la jornada?

Solución propuesta.

Condiciones:

– El lingote equivale al pago de siete días.

– Debe pagarse diariamente en oro.

– Sólo pueden hacerse dos cortes al lingote.

Cada día el contratista debe dar al buzo un séptimo del lingote, así que lo primero que se piensa es partirlo en siete partes, pero esto no es posible ya que se requieren seis cortes y sólo pueden hacerse dos.

6 cortes 2 cortes

7 partes 3 partes

El esquema anterior muestra que aunque no es posible dividir el lingote en séptimos, cada día debe recibir uno de esos “trozos”, y que la solución del problema consiste en determinar, en qué fracciones del lingote hacer los dos cortes.

Vamos a resolverlo por partes: para pagar el primer día se corta 1/7.

6/7 1/7

Ahora bien, si para pagar el segundo día se corta otro séptimo, será imposible continuar pagando diariamente. ¿Qué sucede si cortan 2/7?

4/7 2/7

Pueden entregarse al buzo 2/7 y que él dé como “cambio” el séptimo que recibió el día anterior. Esto resuelve simultáneamente el pago del tercer día, al final del cual el contratista tendrá el fragmento de 4/7 y el buzo los dos que equivalen a 3/7.

¿Ya descubrió qué hacer los días siguientes? El cuarto día, el buzo recibe el fragmento de 4/7 y devuelve los dos que tiene en su poder. El quinto, recibe el de 1/7; el sexto día recibe nuevamente el de dos séptimos y devuelve el de uno, el cual finalmente recibe el último día de trabajo.

¿CUÁLES SON LOS ROLES QUE DEBE DESEMPEÑAR UN PROFESOR CUANDO ENSEÑA MATEMÁTICA?

El modelo tradicional de enseñanza, se ha caracterizado por identificar roles bien definidos para los participantes en el hecho educativo: el maestro enseña y el alumno aprende.

Sin embargo, las tendencias actuales en educación pretenden romper con este esquema y dinamizar las relaciones de manera que ambos enseñen y aprendan continuamente.

Como es natural, tanto las experiencias previas como los conocimientos que poseen maestros y alumnos, difieren en cantidad y profundidad. Además, la acción del docente tiene una clara intencionalidad: que sus alumnos aprendan.

Nuestra visión para hacer concreta dicha intencionalidad, concibe al maestro como :

Diseñador
Estratega
Facilitador
Guía
Mediador.

Las características anteriores implican que buscamos que los docentes reflexionen sobre la labor que realizan, definiendo sus metas, analizando los recursos con que cuentan, involucrando su creatividad personal en la preparación de sus clases.

Esperamos que conozca, busque e invente diversas estrategias de enseñanza.

Como *guía*, esperamos que conozca el sendero por el que orienta a sus alumnos y los posibles obstáculos que surjan; su función es que no se pierdan, animarlos, instarlos a esforzarse, apoyarlos para que no se rindan.

Como *mediador*, debe poseer conocimientos profundos de los contenidos que pretende que los alumnos aprendan, es evidente que no se puede enseñar algo desconocido o ignorado.

Además, se requiere compromiso por contribuir a enfrentar y superar los obstáculos que encuentran sus alumnos, cuando construyen conocimientos.
Consideramos que se requiere el mismo nivel de compromiso con la superación personal y la profundización de los saberes matemáticos y metodológicos.

Esta es nuestra visión, pero lo más importante es la forma como usted se concibe como docente cuando enseña matemática, por eso le proponemos que realice la siguiente actividad en su Texto Paralelo.

Actividad 4

a. Reflexione y describa cuáles considera que son las funciones que debe realizar en la clase de matemática.

b. Describa las funciones que considera que no le corresponde realizar e indique por qué.

c. Busque documentos que en el nivel nacional indiquen las funciones que se requiere que realicen los docentes, mucho mejor si específicamente en el área de matemática y en el nivel primario.

d. Compare lo que usted piensa que le corresponde realizar y los requerimientos del sistema educativo. Determine cuáles son las diferencias y opine acerca de su importancia.

e. Si hay algún requerimiento que usted considere que no le compete satisfacer, ¿en qué condiciones estaría dispuesto a esforzarse por satisfacerlo?

f. Comparta sus opiniones con sus compañeros(as).

Para cerrar esta sección, queremos compartir un pensamiento para reflexionar acerca del sentido que podemos darle a nuestra labor docente.

"La enseñanza de la ciencia se debiera impartir de modo que lo que se ofrece se percibiera como un valioso regalo y no como un duro deber".

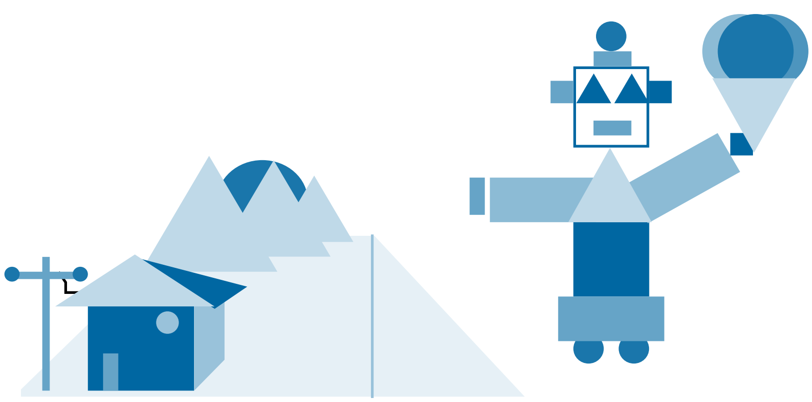
Albert Einstein.

ACTIVIDADES PARA REALIZAR CON LOS ALUMNOS:

En esta sección se proponen actividades para realizar con los niños, las cuales pretenden desarrollar estrategias como: representar situaciones usando dibujos o esquemas, buscar regularidades, utilizar el razonamiento, organizar información, simplificar situaciones, reformular condiciones, etc..

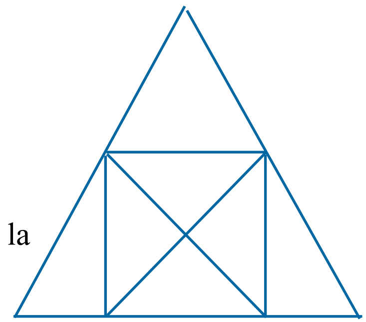
Actividad 1

Materiales: juego de 24 figuras geométricas, triángulos, rectángulos, círculos, y cuadrados, en tres colores diferentes; en tamaño grande y pequeño.
Modalidad de trabajo: individual.
Procedimiento: utilizando las figuras geométricas genere formas que desarrollen la creatividad de los alumnos, por ejemplo.



Proponga a sus alumnos que creen sus propios diseños.

Actividad 2



Modalidad de trabajo: individual.

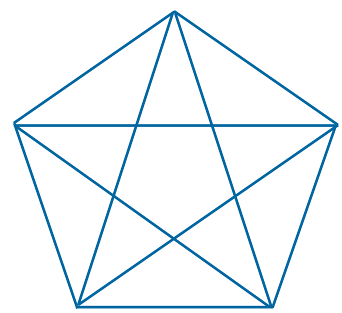
Procedimiento:

a Dibuje en el pizarrón la figura mostrada y pida a los niños que la reproduzcan en su cuaderno.

b. Pídales que nombren la figuras que observan y cuente cuántas hay de cada una.

Actividad 3

Modalidad de trabajo: en pareja.



Procedimiento:

a. Cuente a los niños que en la antigua Grecia existió un hombre llamado Pitágoras, quien hizo grandes aportes a la matemática (indague si tienen idea de la ubicación de Grecia, si no use un mapa para mostrarles) . Él tenía un grupo de amigos con los que estudiaba. Como símbolo de hermandad adoptaron la figura mostrada, en la cual aseguraban que habían 35 triángulos. Pídales que los encuentren.

b. Indique a los niños que imaginen que cada pareja forma un grupo como el que tenía Pitágoras, pídales que inventen un símbolo que los identifique. Cuando ya lo tengan, deben reproducirlo en una hoja y al final péguelas en el pizarrón para que todos puedan observan los símbolos inventados.

Actividad 4

Materiales: un vaso, agua, hielo, cinta adhesiva.
Modalidad de trabajo: grupos de tres.

Procedimiento:

a. Indique a los niños que rotulen el vaso con sus nombres, luego coloquen hielo en el vaso y agreguen agua hasta llenarlo, cuidando de que no se derrame.

b. Promueva que discutan entre ellos qué sucederá cuando el hielo se derrita: ¿se derramará el agua?

Pídales que escriban sus suposiciones, incluyendo razones para ellas. Cuando el hielo se haya derretido, que comparen sus suposiciones con lo ocurrido y promueva la construcción de explicaciones.

Actividad 5

Modalidad de trabajo: trabajo en pareja.

Procedimiento: cada miembro de la pareja escribe los dos sabores de helado que más le gusta. Si al comparar los sabores hay alguno que se repite, uno de los integrantes debe cambiarlo.
Cada pareja debe determinar de cuántas maneras diferentes pueden elegir un helado de dos sabores distintos.

Anime a los niños a que hagan dibujos. Revise el trabajo que realizan las parejas, usualmente se da el caso de considerar sabores como, chocolate y vainilla, y que los niños dibujen:

o

Promueva que argumenten si consideran o no que ambos son la misma combinación de sabores.

Es usual, que cuando se resuelven problemas, se analice el resultado final reconstruyendo los pasos que condujeron a ese resultado. Los cálculos parciales pueden organizarse en una tabla.

Proponemos que presente a un grupo de niños la siguiente actividad:

Actividad 6

Modalidad de trabajo: individual.

Una noche de invierno la temperatura descendió 14 grados entre la media noche y las 6:00 a.m. Entre las 6:00 a.m. y las 10:00 a.m. la temperatura se duplicó. Para el medio día se había elevado otros 11 grados, llegando hasta 33º. Hallar la temperatura registrada a la media noche.

Actividad 7

Modalidad de trabajo: individual.

Gabriela participó en un juego en el cual cada jugador inicia con una cantidad de puntos. El primer turno duplicó sus puntos, perdió 24 en el segundo, ganó 12 en el tercer turno y terminó el juego con 30 puntos.
¿Con cuántos puntos empezó Gabriela el juego?

En las dos últimas actividades, promueva que los niños elaboren un plan, lo ejecuten, evalúen las respuestas obtenidas y las comparen con las de sus compañeros, en busca de que expliquen los procedimientos usados.

SUGERENCIAS DE TRABAJO

Aprendiendo Matemática

La Matemática es una ciencia con estructura particular. Consulte diversas fuentes de información y describa con sus propias palabras que entiende por:

a) Axioma. b) Definición. c) Teorema. d) Paradoja. e) Postulado.

Incluya al menos dos ejemplos de cada uno.

Para ponerse a pensar

María y Fernando llegaron a la misma hora, y si bien es cierto que María llegó antes que Laura, esta última llegó después que Miguel.

a) ¿Quién llegó antes, María o Miguel?
b) Cuál de los siguientes enunciados se necesita para resolver el problema:
   - √ Laura llegó después que Fernando.
   - √ Fernando llegó antes que Laura.
   - √ Miguel llegó antes que Fernando.
   - √ Miguel llegó antes que Laura.

Para conocer cómo piensan los niños

Proponga la siguiente situación a varios niños y niñas y registre las estrategias que usan para resolverla, preguntas que hacen, etc..

Ana, Cristina y Raquel obtuvieron los tres primeros puestos en la maratón de la escuela.

Si se sabe que: Ana no entró en segundo lugar. Ana y la que ocupa el segundo lugar felicitaron a Raquel.

¿En qué puesto quedó cada una?

Actividades didácticas

Con base en lo expuesto en el capítulo y sus propias reflexiones, seleccione un tema que se enseñe en cualquier grado de la escuela primaria y diseñe una clase, especificando materiales, actividades, ejemplos, distribución de tiempo, etc.

Lecturas complementarias

Investigue los aportes más importantes de Jean Piaget a la enseñanza.
Concrete su aplicación en la educación matemática.

CAPÍTULO II

PENSAMIENTO LÓGICO - MATEMÁTICO

INTRODUCCIÓN

En la vida cotidiana y en diversas actividades académicas y productivas, se encuentran muchas expresiones cuya interpretación requiere del análisis de su estructura lógica, por ejemplo: actas, convenios, contratos, escrituras de propiedad, etc..

Por esta razón, en el capítulo anterior se enfatizó la importancia de fomentar el desarrollo del razonamiento desde los primeros años de escolaridad.

Adicionalmente, la actividad intra - matemática se orienta notoriamente hacia la construcción de argumentos válidos.

La primera parte de este capítulo está dedicada a la formación de los maestros; en ella se revisan aspectos conceptuales respecto al enunciado de proposiciones y sus negaciones, incluyendo el uso de cuantificadores.

A partir de la identificación de proposiciónes simples se analiza la construcción de conjunciones, disyunciones, implicaciones y doble implicaciones, con sus respectivos valores de verdad.

La segunda parte del capítulo incluye actividades que buscan diferenciar el razonamiento inductivo del deductivo.

Para el primer caso se presentan ejemplos y actividades diseñadas para elaborar conjeturas a partir del reconocimiento de patrones, en series numéricas y arreglos geométricos.

En el segundo caso se analizan esquemas de razonamiento como el Modus Ponens y Modus Tollens.

La sección dedicada al trabajo con los niños, presenta una amplia gama de actividades para realizar en los distintos niveles de la educación primaria.

Se espera brindar a los docentes en formación y en servicio, ideas generadoras que les permita involucrarse en el diseño y adecuación de actividades que propicien el desarrollo del pensamiento lógico - matemático de los niños.

PROPOSICIONES

En el lenguaje cotidiano se utilizan expresiones basadas en hechos, opiniones, preguntas, órdenes y exclamaciones.

A continuación estudiaremos las expresiones de las cuales puede decirse sin ambigüedad, si son verdaderas o falsas. Estas expresiones se denominan ***proposiciones*** .

Analice los siguientes enunciados:

a) ¿Le gusta estudiar matemática?
b) En todos los países latinoamericanos se habla español.
c) Algunos triángulos son equiláteros.
d) La música clásica es bella.
e) El cloro en estado natural es gaseoso.
f) ¡Me fascinan los pasteles!
g) $2/3 > 3/5$.

¿Cuáles de ellos son proposiciones? Habrá notado que sólo de las expresiones dadas en b, c, e y g puede decirse sin son verdaderas o falsas.

Es común que las proposiciones se simbolicen por medio de las últimas letras del alfabeto castellano, aunque esto es sólo una convención.

Por ejemplo:

p: cinco es un número par. q: el radio terrestre es mayor que el radio lunar.

Negación

Tanto en la vida real como en el trabajo con la matemática, continuamente nos encontramos con negaciones de expresiones. Para el caso de las proposiciones, se tiene que si p es verdadera, su negación es falsa y viceversa. Para representar la negación de p se usará la notación $\sim p$

En los ejemplos anteriores, se tiene que p es falsa y q es verdadera, veamos que sus negaciones $\sim p$: cinco no es un número par y $\sim q$: el radio terrestre no es mayor que el radio lunar, son verdadera y falsa respectivamente.

¿Cuál es la negación de las siguientes proposiciones?

s: El uranio no es un elemento radioactivo.

r: 4 no es divisor de 15.

¿Qué sucede cuando se niega una negación?

CUANTIFICADORES

Se usan cuando en matemática es necesario precisar *a cuántos de los casos posibles* se está haciendo referencia.

Cuantificador universal

Las expresiones ***todo, cada uno, todos, ninguno***, indican que se hace referencia a la totalidad de los casos, éstas están asociadas al significado de ***cuantificador universal***, el cual se simboliza como $\forall$ y se lee " para todo ".

Ejemplos:

p : Todo triángulo isósceles es rectángulo.
q : Todos los mamíferos son vertebrados.

En muchas ocasiones, el cuantificador universal aparece de manera implícita en las expresiones.

Ejemplo: en " los múltiplos de 10 terminan en cero",
se sobrentiende " todos los múltiplos de 10 terminan en cero".

Cuantificador existencial

Las expresiones ***algún, alguno, existe alguno, al menos uno***, hacen referencia a que no se considera a la totalidad de los casos posibles; éstas están asociadas al significado de cuantificador existencial para el que se utiliza el símbolo $\exists$, y se lee: "existe al menos uno".

Ejemplo: r : Algunos ovíparos son mamíferos.
s : Existen algunas aves que no vuelan.

Al negar proposiciones resulta importante tener mucho cuidado con el uso de los cuantificadores.

Analicemos lo que sucede al negar: p : Todo triángulo isósceles es rectángulo.
Una versión muy común es: $\sim p$: Ningún triángulo isósceles es rectángulo.

Nótese que tanto p como su negación son falsas, por lo tanto, la negación no se construyó adecuadamente. Anteriormente se expuso que se cuenta con dos tipos de cuantificadores, por lo tanto, puede inferirse que uno es la negación del otro.

De manera que la negación buscada es: algún triángulo isósceles no es rectángulo, la cual es verdadera como se requiere.
De manera análoga, la negación de la proposición:
s : Existen algunas aves que no vuelan; es $\sim s$: Todas las aves vuelan.

Para una mejor comprensión de lo anterior le proponemos que realice en su texto paralelo lo siguiente:

Actividad 1

a. Escriba tres expresiones que sean proposiciones.
b. Escriba tres expresiones que no sean proposiciones.
   Indique en cada caso por qué con o por qué no son proposiciones.
c. Busque en artículos de prensa o revistas tres proposiciones en las que se utilicen cuantificadores universales y tres que usen cuantificadores existenciales.
d. Determine si cada proposición es verdadera o falsa.
e. Construya la negación de cada proposición.

PROPOSICIONES COMPUESTAS

Son las expresiones que se originan al combinar *proposiciones simples* con la ayuda de conectivos lógicos. Las proposiciones compuestas generadas se muestran a continuación:

Proposición compuesta	Conectivo	Símbolo
Conjunción	y	$\wedge$
Disyunción	o	$\vee$
Implicación	si....entonces	$\Rightarrow$
Doble implicación	si y sólo si	$\Leftrightarrow$

Conjunciones

Dadas dos proposiciones simples, al combinarlas usando el conectivo lógico ***y,*** se genera una proposición compuesta llamada ***conjunción***.

Ejemplo A

p: El agua es uno de los elementos esenciales para la vida.

q: El hielo es agua en estado sólido.

A partir de estas expresiones puede formarse otra más compleja que incluya el sentido de ambas:

El agua es uno de los elementos esenciales para la vida ***y*** el hielo es agua en estado sólido

$$p \wedge q$$

La conjunción formada se representa por:
Las conjunciones aparecen continuamente en distintos contextos, dando un carácter categórico al significado de las expresiones.

Ejemplo B

Don Juan compra un televisor y recibe un certificado de garantía.

El televisor se descompone y don Juan analiza los requisitos que debe llenar satisfacer para reclamar tal garantía.

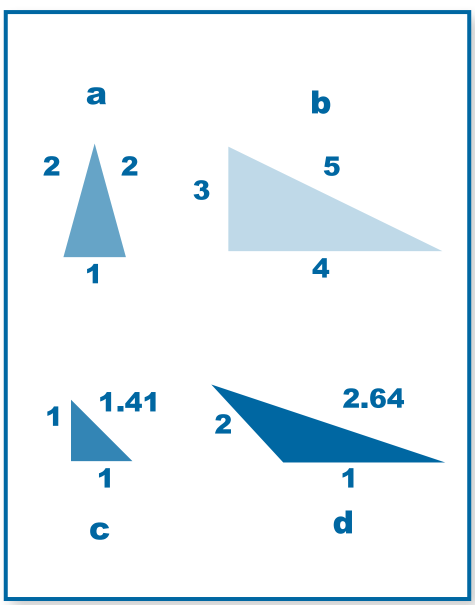
- Que el tiempo entre la compra y el reclamo no exceda de un año.
- Presentar el certificado de garantía.
- Presentar la factura del televisor.
- Solicitar de revisión al departamento técnico.
- Opinión técnica de que la falla no se debe a mal trato del aparato.

> *Este documento respalda la garantía de buen funcionamiento durante un año, del televisor marca "SuperVisión" de 27".*
>
> *Para cualquier reclamo debe adjuntarse a la factura y solicitar la revisión del aparato en nuestro departamento técnico.*
>
> *La garantía queda sin efecto si se detecta que la falla se debe a mal trato del aparato por parte del usuario*

Es claro que deben satisfacerse todos los requisitos.

Ejemplo C

Este caso muestra que para hacer verdadera una conjunción, se requiere que sean verdaderas en forma simultánea, todas las proposiciones simples que la forman.



Determinar cuál de los triángulos es isósceles ***y*** rectángulo.

Puede notarse que en la pregunta hay dos proposiciones:

p: El triángulo es isósceles (dos lados de igual medida).
q: El triángulo es rectángulo (tiene un ángulo recto).

Analicemos el triángulo dado en cada caso:

a Es isósceles pero no es rectángulo.
b Es rectángulo pero no es isósceles.
c Es isósceles y es rectángulo.
d No es isósceles ni es rectángulo.

En consecuencia, el triángulo que cumple con las condiciones es el mostrado en el inciso c.

Disyunciones

Cuando las proposiciones se enlazan por medio de un ***o***, la proposición compuesta formada se llama ***disyunción***.

El uso del ***o*** tiene dos significados, los cuales se analizan por separado.

Disyunción exclusiva : dadas dos condiciones, la satisfacción de una automáticamente descarta la posibilidad de satisfacer la otra, por eso algunos autores le llaman **alternativa**. Por ejemplo: una persona está viva ó está muerta; un número natural es par ó impar; una puerta está abierta ó cerrada.

$$\mathbf{p} \quad \underline{\vee} \quad \mathbf{g}$$

Disyunción inclusiva : llamada así por el hecho de que al tener dos condiciones, se acepta la satisfacción de cualquiera de las dos, incluyendo la posibilidad de que se satisfagan ambas. Esta sería una diferencia fundamental con la disyunción exclusiva, ya que ésta niega la posibilidad de satisfacción conjunta de las condiciones.

$$\mathbf{p} \quad \vee \quad \mathbf{g}$$

La disyunción inclusiva aparece muchas veces en el lenguaje como "y/o".

De acuerdo con lo anterior, se tiene que la proposición compuesta:
30 es número par ***o*** múltiplo de 8, es verdadera, ya que al menos una de las proposiciones es verdadera.

Para profundizar en lo expuesto, realice en su texto paralelo las siguientes actividades.

Actividad 2

Indique si las expresiones dadas son verdaderas o falsas; en cada caso explique en qué fundamenta su respuesta:

a. Los planetas giran alrededor del sol y rotan sobre su eje.

b Los números distintos del cero son positivos o negativos.

c. 20 + 2*4 = 28 o 20 es múltiplo de 8.

Actividad 3

Escriba todos los elementos que convierten en proposiciones verdaderas las siguientes expresiones:

a. Números naturales que son mayores que dos y menores que diez.

b. Números impares menores que 10 o divisores de 15.

c. Cuadriláteros que tengan sus cuatro lados de igual medida o cuatro ángulos rectos.

Actividad 4

Analice artículos de prensa, revistas, etc. con el fin de identificar conjunciones y disyunciones. Determine en cada caso si las proposiciones compuestas son verdaderas o falsas, explicando por qué.

Consideramos conveniente evidenciar que el uso de la lógica se desarrolló en el seno de comunidades elitistas con propósitos bien definidos tales como: expresarse con claridad y coherencia, analizar información y tomar decisiones pertinentes en asuntos gubernativos y legislativos. Esto es particularmente importante pues evita olvidar que, si bien es cierto, la lógica formal sólo se interesa por la estructura, las expresiones que se construyen deben tener sentido en el contexto específico en que se formulan.

Es conveniente no perder de vista que el estudio de la lógica que presentamos, se basa en la posibilidad de poder determinar, sin ambigüedad, la veracidad o falsedad de un enunciado y que dichos valores se circunscriben a contextos bien definidos. Por ejemplo, la expresión: la gravedad tiene un valor aproximado de 981 m/s^2 es verdadera si se considera como contexto la tierra, pero será falsa si se refiere a la luna

Implicación

Se origina cuando dos proposiciones simples se combinan mediante el conectivo lógico **si...entonces**.

Si *p* ***entonces*** *q*,

suele interpretarse como: *p* es suficiente para *q, p* implica *q*.

Por el contexto en que surgieron, estas expresiones inicialmente establecían algunas relaciones de causa-efecto, llamándose a *p* ***antecedente*** y a *q* ***consecuente.***
El desarrollo de la simbolización de las relaciones observadas en la realidad, originó la superación de esta visión, de manera que actualmente las implicaciones no representan relaciones de causalidad, aunque esta sea la forma en que se usen cotidianamente.

La terminología usada también ha ido cambiando, siendo más usada en la actualidad la denominación de ***hipótesis*** para p y ***tesis*** o ***conclusión*** para q.

Veamos algunos ejemplos de implicaciones:

Ejemplo D. Si dos rectas son paralelas, entonces tienen la misma pendiente.

Ejemplo E. Si un cuerpo a determinada temperatura se expone al medio ambiente,entonces después de cierto tiempo su temperatura será la del medio ambiente.

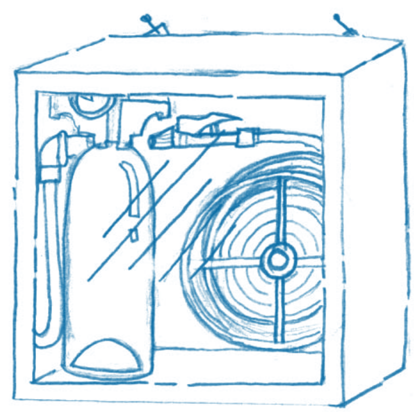
Ejemplo F. Si un animal es mamífero, entonces es vivíparo.

Ejemplo G. Si dos átomos comparten electrones, entonces forman un enlace covalente.

Por su utilidad en el razonamiento deductivo, es necesario poder determinar cuándo una implicación es verdadera o falsa.

Para ello analicemos la siguiente situación:

Ejemplo H
En un edificio, hay un lugar en el cual se guarda una manguera protegida por una puerta de vidrio, con un rótulo que dice: "En caso de incendio, rompa el vidrio".



La instrucción anterior para el uso de la manguera puede interpretarse como: "Si hay un incendio, entonces rompa el vidrio".

En la tabla siguiente se muestran las posibilidades en el seguimiento de la indicación.

	p	q	$p \Rightarrow q$
1	Ocurre un incendio	Las personas rompen el vidrio	Si ocurre un incendio entonces las personas rompen el vidrio
2	Ocurre un incendio	Las personas no rompen el vidrio	Si ocurre un incendio entonces las personas no rompen el vidrio
3	No ocurre un incendio	Las personas rompen el vidrio	Si no ocurre un incendio entonces las personas rompen el vidrio
4	No ocurre un incendio	Las personas no rompen el vidrio	Si no ocurre un incendio entonces las personas no rompen el vidrio

Puede considerarse que la indicación no fue atendida únicamente en el caso 2, ya que habiendo ocurrido el incendio las personas no rompieron el vidrio para sacar la manguera, por lo tanto, la implicación planteada se valora como falsa.

En el caso 1 se observa que la ocurrencia del incendio fue suficiente para que las personas rompieran el vidrio, esto es, la ocurrencia de p es suficiente para la ocurrencia de q; siendo verdadera la implicación planteada.

Los casos 3 y 4 muestran que partiendo de una hipótesis falsa pueden obtenerse tanto conclusiones verdaderas como falsas, pero en ninguno de los casos puede decirse que la implicación planteada es falsa.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Una implicación es falsa sòlo en el caso en que partiendo de una hipótesis verdadera, se concluya una falsedad

Es importante evidenciar que aunque es posible obtener conclusiones verdaderas partiendo de premisas falsas, estos casos no son del interés de la matemática, ya que no es aceptable que las ciencias se fundamenten en enunciados cuya falsedad es reconocida. Por lo tanto, en el trabajo con implicaciones, se parte de una hipótesis verdadera con el objetivo de establecer que la conclusión es verdadera, y de esta manera que la implicación planteada es verdadera.

Actividad 5

a. Identifique la hipótesis y la conclusión de cada implicación y determine si es falsa o verdadera.

- Si 20 es múltiplo de 2, entonces es múltiplo de 3.
- Si una persona es centroamericana, entonces es americana.
- Si el oxígeno es un elemento radiactivo, entonces se combina con el hidrogeno para formar el agua.

b. Escriba dos implicaciones verdaderas y dos falsas, estableciendo la veracidad o falsedad de la hipótesis y la conclusión.

c. Busque en anuncios de prensa implicaciones y determine si son verdaderas o falsas, explique en que se fundamentan sus opiniones.
(Tenga cuidado de no seleccionar relaciones causa - efecto)

En la vida diaria es de mucha utilidad conocer otras proposiciones asociadas con una implicación, llamadas recíproca, inversa y contrarecíproca. Cada una se analiza a través de los siguientes ejemplos:

Implicación. Se simboliza por $p \Rightarrow q$ (p implica q).

Si al interactuar dos cargas eléctricas, se genera una fuerza de atracción, entonces las cargas son de diferente signo.

Recíproca. Si dos cargas eléctricas son de diferente signo entonces al interactuar se genera una fuerza de atracción entre ellas.

Vemos que esta implicación es de la forma, $q \Rightarrow p$ que se lee: "si se cumple q entonces se cumple p".

Inversa. Si al interactuar dos cargas eléctricas, no se genera una fuerza de atracción, entonces las cargas no son de signos diferentes.
La implicación anterior es de la forma: $\sim p \Rightarrow \sim q$, lo cual se lee: "si p no se cumple entonces no se cumple q"

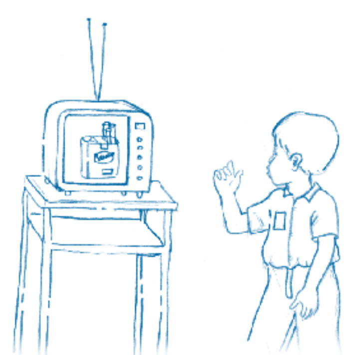
Contrarrecíproca. Si dos cargas eléctricas no son de diferente signo, entonces al interactuar no se genera una fuerza de atracción entre ellas.

Esta implicación tiene la forma: $\sim q \Rightarrow \sim p$, la que significa que "si no se cumple q entonces no se cumple p."

Aunque el objetivo de la lógica formal no es el análisis lingüístico, veamos como su conocimiento puede ayudar en el análisis de información que cotidianamente "bombardea" a los ciudadanos.

Ejemplo I
En un anuncio comercial se dice lo siguiente: "Si quiere ser un triunfador, fume cigarrillos *Humo en tus ojos*. La gente que fuma *Humo en tus ojos* se siente segura de sí misma. ¡Usted merece triunfar!. Recuerde: no acepte otro cigarrillo." Con fines de ordenación vamos a separar las expresiones:

1. Si quiere ser un triunfador, fume cigarrillos *Humo en tus ojos*.
2. La gente que fuma *Humo en tus ojos* se siente segura de sí mismo.
3. ¡Usted merece triunfar! Recuerde: no acepte otro cigarrillo



El mensaje del comercial se diseñó aceptando la veracidad de las siguientes suposiciones:

a) Generalmente, las personas desean triunfar.

b) Las personas necesitan sentirse seguras de sí mismas.

c) Las personas necesitan pensar que son merecedoras del éxito.

Las asociaciones que sugieren las expresiones del anuncio son:

Deseo de éxito con fumar, particularmente la marca dada.

Fumar la marca de cigarrillos dada con sentir seguridad en sí mismo.

Merecer el éxito con no aceptar otra marca de cigarrillo.

Además la expresión 1: "Si quiere ser un triunfador, fume cigarrillos *Humo en tus ojos"*, puede inducir a pensar en la expresión recíproca "Si fuma cigarrillos *Humo en tus ojos*, quiere ser un triunfador". Esta última expresión personalizada y matizada por la necesidad de hacer realidad los deseos, puede generar el pensamiento: "Si fumo cigarrillos *Humo en tus ojos*, **seré** un triunfador".

Por otra parte, la expresión 2: "La gente que fuma *Humo en tus ojos* se siente segura de sí misma", puede reformularse como: " si la gente fuma *Humo en tus ojos* se siente segura de sí misma". Nuevamente, personalizando la última expresión, el consumidor puede pensar:
"si yo no fumo *Humo en tus ojos* no me siento seguro de mí mismo"

Finalmente, la tercera expresión: "¡Usted merece triunfar!. Recuerde: no acepte otro cigarrillo", advierte al consumidor: merecer el éxito equivale a no aceptar otra marca de cigarrillo.

Los publicistas esperan que con base en los pensamientos erróneamente inducidos y descritos anteriormente, las personas tomen la decisión de fumar *Humo en tus ojos.*

Actividad 5

a. Analice al menos dos anuncios de prensa o televisión, identifique la estructura de la expresiones que se utilizan, argumente acerca de la posibilidad de establecer su falsedad o veracidad y analice los posibles pensamientos que inducen, etc.
b. Con base en lo anterior, emita un juicio crítico respecto a los mensajes que transmiten.
c. Pensando en su actividad en el aula: ¿cómo puede ayudar a preparar a los niños para que sean ciudadanos críticos y reflexivos?

Doble implicación

Cuando dos proposiciones simples se enlazan por medio del conectivo **si y sólo si,** la proposición compuesta se conoce como doble implicación.

Si entre dos proposiciones simples se establecen implicaciones en ambos sentidos ($p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$) cuyos valores de verdad coinciden, la relación establecida es muy fuerte, hasta el punto de que p y q se consideran lógicamente equivalentes.

Tal como se expresó anteriormente, la matemática se fundamenta en enunciados verdaderos, así que particularmente interesan los casos en que tanto una implicación como su recíproca sean verdaderas.

Ejemplo J
La expresión: " todo número natural es racional", puede estructurarse como implicación:
si un número es natural entonces es racional.

Puede observarse que si un número hace verdadera la hipótesis (es natural), esto es suficiente para que la conclusión sea verdadera (es racional), permitiendo afirmar que la implicación establecida es verdadera. 2 es un número natural, en vista de que puede escribirse de la forma 2/1, es un racional. Por lo tanto, la implicación establecida es verdadera.

Ahora formulemos la recíproca de la implicación: si un número es racional entonces es natural. Probemos con un número que haga verdadera la hipótesis, por ejemplo 1/2. Resulta evidente que este número no es natural, es decir, partiendo de una verdad se llega a una falsedad; en consecuencia la recíproca es falsa.

El resultado obtenido, permite afirmar que el hecho de que un número sea natural, no es equivalente a que dicho número sea racional.

Ejemplo K
Una expresión que comúnmente se estudia en el nivel primario es: " Los números primos son aquellos que sólo son divisibles por ellos mismos y la unidad". De esta expresión puede formularse una implicación y su recíproca:

- Si un número es primo entonces sólo es divisible por él mismo y la unidad.

- Si un número sólo es divisible por él mismo y por la unidad entonces es primo.

Así que en los números naturales, ser primo **equivale** a ser divisible únicamente por sí mismo y la unidad.

Tomando un número que sea primo, por ejemplo 7, puede verificarse que sus únicos divisores son 1 y 7; por lo tanto, la implicación es verdadera. Para el caso de la recíproca, considerando por ejemplo el 13, se verifica que sus únicos divisores son 13 y 1 y se concluye que es número primo, originando que la recíproca sea verdadera.

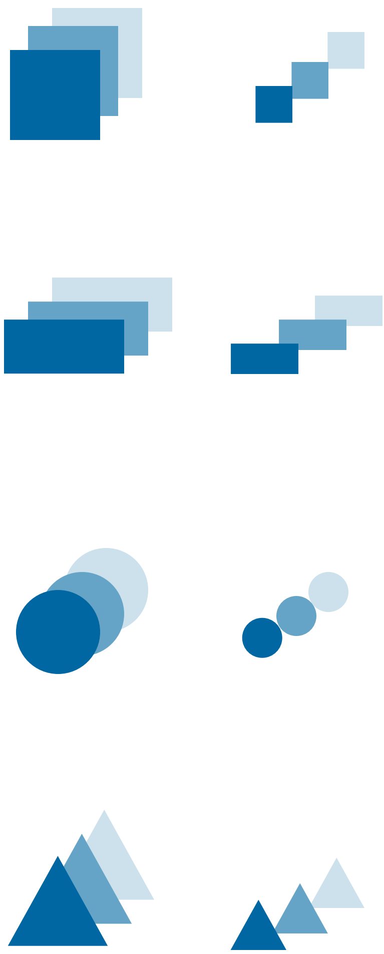
Actividad 7

a. Considere las implicaciones verdaderas que escribió en el inciso b de la actividad 4, construya sus recíprocas y argumente acerca de su veracidad o falsedad.

b. Use el conectivo *si y sólo si* para escribir la doble implicación formada en cada caso, identificando las proposiciones simples que sean lógicamente equivalentes.

c. Busque expresiones que se enseñan usualmente en matemática y otras asignaturas y en caso de ser posible, escríbalas como una doble implicación.

Actividades para realizar con los alumnos



Las conjunciones y disyunciones son utilizadas por los niños desde temprana edad en los procesos de selección, clasificación y ordenación que realizan.

El análisis de conjunciones y disyunciones resulta más efectivo cuando se realiza también en otras asignaturas como: Ciencias Naturales, Estudios Sociales, arte, etc.

Las actividades que presentamos, incluyen la manipulación de figuras y otros objetos.

El material didáctico cuyo uso se propone, puede fabricarse con cartulina, madera, duroport, cartón, etc. Se compone de 24 piezas de un tamaño adecuado que permita su manipulación.

Las figuras tendrán las siguientes características:

√ Tamaño: grande, pequeño.
√ Color : rojo, amarillo, azul.
√ Form: cuadrado, rectángulo, triángulo, círculo.

Además de este material, se recomienda el uso de pliegos de papel, pedazos de cordel de diferentes colores, marcadores, etc.

Es conveniente aclarar, que para la realización de cada actividad, se toma como referente el conjunto de las 24 figuras descritas.

Actividad 1

Se pretende que los niños identifiquen las figuras que satisfacen una o ambas de características indicadas.

Materiales: juego de 24 figuras como el descrito.
Modalidad de trabajo: pareja.
Procedimiento: dé a los niños instrucciones para que seleccionen las figuras descritas en cada caso. Verifique si la selección fue correcta, pidiendo a algunos alumnos que peguen en el pizarrón las figuras. Promueva que el grupo acepte o rechace la propuesta, argumentando razones en cada caso.

a. Conjunto de figuras que son cuadrados o que son azules.
b. Entre las figuras anteriores, seleccione las que sean rojas o pequeñas.
   ¿Cuál es la forma que más aparace en este conjunto?
c. De este último conjunto, seleccione las figuras que sean grandes o que no tengan 4 lados.

Actividad 2

Modalidad de trabajo: pareja.

a. Indique a los niños que seleccionen el conjunto de figuras que son rojas y grandes a la vez.
b. Luego, que separen las figuras que sean rojas, grandes y tienen cuatro lados.
c. De este último grupo, pida que seleccionen a las que son rojas, grandes y tienen cuatro lados iguales.

Actividad 3

Presente a los niños algunos de los derechos que internacionalmente les son reconocidos. Pídales que identifiquen las conjunciones y disyunciones contenidas en el texto y que explique su interpretación de ellas.

Modalidad de trabajo: grupos de 3

a. El niño tiene derecho desde su nacimiento a un nombre y a una nacionalidad.
b. El niño gozará de protección especial para que pueda desarrollarse física, mental, moral y socialmente.
c. El niño física o mentalmente impedido debe recibir el tratamiento, educación y cuidado especial que exige su caso particular.

Actividad 4

Modalidad de trabajo: pareja.
Procedimiento: presente a los niños las siguiente situación problema para que la resuelvan. Sugiera que hagan dibujos o esquemas para representar. Promueva la discusión de los resultados obtenidos.

Un niño calcula que para comprar 7 caramelos le faltan 2 céntimos y para comprar 5 le sobran 4 céntimos.
¿Cuánto dinero tiene el niño?

RAZONAMIENTO

Razonamiento: es el proceso mental por medio del cual se obtienen conclusiones como resultado del análisis de información.

En ocasiones, se extraen conclusiones basadas en observaciones personales, sin un análisis profundo de la información, o bien, sobre información incompleta. En estos casos es muy usual que las conclusiones extraídas no sean verdaderas y en tal caso el razonamiento realizado se cataloga como *falacia*.

En matemática, un razonamiento válido requiere proposiciones verdaderas y relaciones válidas entre ellas. *La lógica* se interesa en la validez de las relaciones establecidas entre los enunciados, más que en verificar si en la realidad éstos son verdaderos.

Es claro que el desarrollo del razonamiento no constituye un campo de acción exclusivo de la matemática, pero es innegable, que debido a su naturaleza, es una de las asignaturas más propicias para ello.

Nuestra postura es que difícilmente el razonamiento "florece" espontáneamente, y por tanto es indispensable la clara intencionalidad de fomentarlo.

La experiencia como docentes nos ha demostrado que sólo se aprende a razonar correctamente, razonando; en consecuencia, eso es lo que proponemos a los estudiantes de magisterio y maestros en servicio.

Muchos errores lógicos se originan en la confusión entre las condiciones necesarias y las condiciones suficientes. Veamos algunos ejemplos para ilustrar este hecho: a veces hay condiciones que son necesarias pero no son suficientes, como que para ganar la lotería es necesario adquirir un billete; sin embargo, esto no es suficiente pues además debe salir premiado.

Por otra parte, una condición suficiente basta para obtener un resultado, pero puede no ser necesaria pues existen otras vías para llegar a él. Por ejemplo, nacer en un país es suficiente para ser de esa nacionalidad, pero no es necesario ya que puede optarse por ella.

Hay condiciones que son tanto necesarias como suficientes para obtener un resultado.

Ejemplos:

√ Para ganar la lotería es tanto necesario como suficiente poseer el billete premiado.

√ Muy conocido en matemática es el hecho de que para aceptar que dos rectas en un plano son paralelas, es necesario y suficiente que sus pendientes sean iguales.

√ Euclides expresó en uno de sus postulados que: "Dos puntos son suficientes y necesarios para definir una recta"

RAZONAMIENTO INDUCTIVO

Este tipo de razonamiento se realiza cuando al observar varias veces que una acción produce determinado resultado, se concluye que esa acción tendrá siempre el mismo resultado.
A la conclusión obtenida, mediante este proceso, se le llama generalización o conjetura.

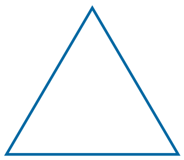
En el ámbito escolar, los procesos inductivos se han conocido a través de indicaciones como: " ir de lo particular a lo general "

Ejemplo ¿Cuál es la medida del ángulo en cada vértice de un polígono regular de 50 lados?

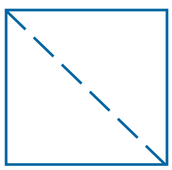
Creando un plan: la medida del ángulo en cada vértice de un polígono regular, puede determinarse una vez que se sabe el total de grados que suman todos.

El total de la suma de los ángulos internos de un polígono puede encontrarse partiéndolo primero en triángulos, cuyos vértices sean los mismos que los del polígono.

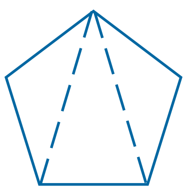
Como resulta muy difícil trabajar con un polígono regular de 50 lados, se inicia el trabajo con otros polígonos más sencillos, como se muestra a continuación.



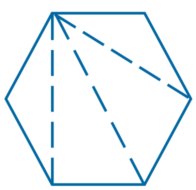
Se sabe que la suma de los ángulos que se forman en los vértices es 180º.
La medida de cada ángulo es de 180º ÷ 3 = 60º



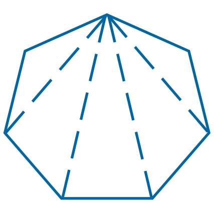
Al conectar uno de los vértices con otro no adyacente, se forman dos triángulos y se tiene que el total de la suma de los ángulos internos para un cuadrado será de: 2 (180º).
La medida de cada ángulo es de 2(180º) ÷ 4 = 90º



En un pentágono, al unir uno de los vértices con los otros no adyacentes, se forman tres triángulos y se tiene que el total de la suma de los ángulos internos para un pentagono será de: 3 (180º).
La medida de cada ángulo es de 3(180º) ÷ 5 = 90º



En un hexágono regular los ángulos suman 4(180º) = 720º
Cada ángulo de sus vértices mide 4(180º) ÷ 6 = 120º



En un heptágono regular 5(180º) = 900º
Cada ángulo de sus vértices mide 5(180º) ÷ 7 = 128.57º

Nótese que conectando un vértice del polígono a cada otro vértice no adyacente, el número de triángulos generados es 2 menos que el número de vértices.

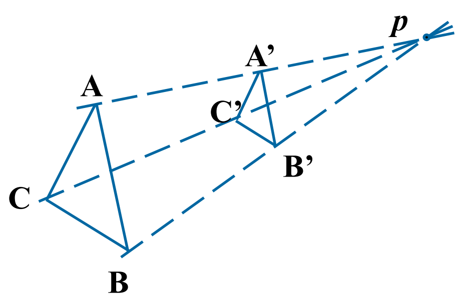
Con lo anterior podemos calcular la suma de las medidas de los ángulos en un polígono regular de 50 lados. 48 x 180 = 8640º y el ángulo en cada vértice mide 8650º ÷ 50 = 172.8º
¿Cuánto mide el ángulo que se forma en cada vértice de un polígono regular de n lados?

Pasos del Razonamiento Inductivo

1. **Se observa que una propiedad es verdadera para varios casos particulares que se verifican.**

2. **Dado que la propiedad es verdadera, en varios casos particulares verificados, se infiere que es válida en general.**

Actividad 1



a. Trace un triángulo ABC cualquiera y mida la longitud de sus lados.

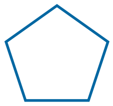
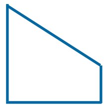
b. Desde un punto ***p***, exterior al triángulo, trace segmentos de rectas hacia los vértices A, B, C.

c. Ubique los puntos medios de los segmentos $\overline{AP}$, $\overline{BP}$ y $\overline{CP}$ y con ellos forme otro triángulo A'B'C'.

d. Mida la longitud de los lados del triángulo A'B'C' y compárelos con las medidas de los lados del triángulo ABC.

e. Elabore una conjetura para explicar la relación entre los lados correspondientes de los triángulos.

f. ¿Qué sucede si en lugar de ubicar el punto medio, divide los segmentos $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$ en tres partes y ubica los nuevos triángulos a 1/3 y 2/3 de los vértices A, B, C?

g. ¿Será válida la conjetura elaborada para otras figuras? tales como:  o 

Explique su respuesta.

Actividad 2

a. Eleve al cuadrado 3 números pares y 3 impares.

b. Observe los números obtenidos y elabore una conjetura para a^2.

c. Repita el proceso elevando al cubo, luego a la cuarta potencia.

d. ¿Sigue siendo válida la conjetura que elaboró para a^2?

Explique su respuesta.

Actividad 3

a. Calcule las siguientes potencias de 3: 3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6, 3^7, 3^8, 3^9.

b. Observe los resultados obtenidos y elabore una conjetura para explicar la cifra en que terminan las potencias de 3.

c. ¿Con qué cifra termina 3^{35}? Explique como obtiene su respuesta.

d. ¿Está de acuerdo con que 3^{80} termina en 9? En cualquier caso justifique su respuesta.

En este punto es importante enfatizar que algunas generalizaciones o conjeturas, pueden no ser verdaderas. Para que una generalización alcance el estatus de verdadera, se requiere de la construcción de una demostración.
De particular interés histórico, es una famosa conclusión obtenida mediante razonamiento inductivo, que en honor a su autor se conoce como " la conjetura de Goldbach". La conjetura elaborada por el alemán Chistrian Goldbach, afirma que cualquier número par mayor que 2, puede expresarse como la suma de dos números primos no necesariamente de forma única.

Por ejemplo:

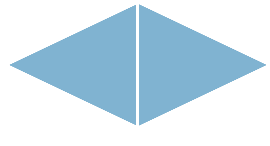
$12 = 5 + 7.$
$48 = 17 + 31.$
$138 = 59 + 79.$

La fama de esta afirmación radica en que a pesar de que su autor la planteó en el siglo XVIII, nadie ha podido demostrarla aún; sin embargo, se acepta como cierta ya que tampoco ha podido encontrarse un número par mayor que dos que no la satisfaga.
Lo anterior indica, que cuando se requiere probar la falsedad de una generalización, basta con que se encuentre un caso en que no se cumple; tal caso se conoce como ***contraejemplo***.
Los siguientes ejemplos de generalizaciones se formulan como implicaciones, cuya hipótesis se considera verdadera. Para que la implicación sea falsa, hay que evidenciar que la conclusión es falsa. Además recordemos que por referirse a la totalidad de los casos posibles se está usando un cuantificador universal, por lo tanto para construir la negación sólo se necesita mostrar que existe al menos un objeto que no cumple con la expresión formulada.

Ejemplo B

Generalización. Si un cuadrilátero tiene sus cuatro lados iguales, entonces tiene cuatro ángulos rectos.
Para evidenciar que esta generalización es falsa, debe presentarse un cuadrilátero que tenga sus cuatro lados iguales, pero que sus ángulos no sean rectos.

Contraejemplo:



El rombo tiene sus lados iguales, pero sus ángulos no son rectos.

Ejemplo C

Generalización: Como 30,60 y 90 son múltiplos de 3 y son números pares entonces todos los números múltiplos de 3 son pares.

Para probar la falsedad de esta generalización, basta encontrar un múltiplo de 3 que no sea par.

Contraejemplo: 15 es un número múltiplo de 3 y no es par.

Los casos anteriores muestran que los razonamientos inductivos pueden ser falsos, cuando a partir de un número finito de casos, se hacen afirmaciones para un número infinito de ellos.

Es más fácil demostrar que las generalizaciones son falsas, ya que como se vió, basta con un contraejemplo. Cuando se tiene que demostrar generalizaciones en conjuntos infinitos como los números naturales o los números enteros positivos, se utiliza el procedimiento conocido como Inducción Matemática, pero su estudio sobrepasa los objetivos de este texto. Se menciona para los lectores que quieran profundizar en el tema.

Actividad 4

Analice las siguientes generalizaciones y determine si son verdaderas o falsas. En cualquier caso, justifique su respuesta.

a. En Guatemala, Honduras y Costa Rica el idioma oficial es el español, por lo tanto en toda la región centroamericana, el español es el idioma oficial.
b. Todos los mamíferos son animales terrestres.
c. En ningún lago existen tiburones.
d. Todos los científicos famosos son de sexo masculino.
e. Todas las rectas que se intersectan son perpendiculares.

RECONOCIMIENTO DE PATRONES

Por su importancia en los razonamientos inductivos, dedicaremos esta sección al reconocimiento de patrones en series numéricas y arreglos geométricos. Para ello, se utilizarán algunos conocimientos elementales de aritmética, álgebra y geometría.

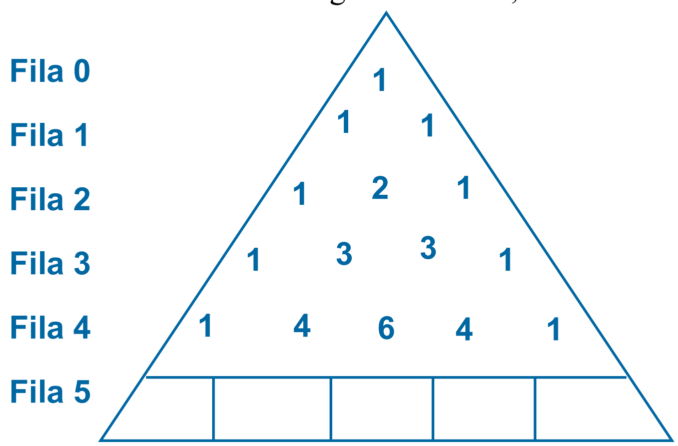
El reconocimiento de regularidades y el desarrollo de la capacidad de describirlas, se constituye en uno de los instrumentos más útiles en la resolución de problemas.

Por otra parte, las actividades que se involucran suelen ser atractivas y retadoras del intelecto.

Finalmente el reconocimiento de patrones puede ayudar en la compresión que la dualidad cambio-constancia, presenta en muchas facetas de la vida diaria y de la ciencia.

Actividad 5

El siguiente arreglo recibe el nombre de Triángulo de Pascal, en honor al matemático francés Blaise Pascal.



a. Observe detenidamente el arreglo y describa las diagonales exteriores.
b. Encuentre la suma de los números en cada fila.
c. ¿Cuánto deberían sumar los números de las siguientes filas?
d. Redacte una generalización para estas sumas.
e. Observe los números distintos de1y establezca la relación que existe entre ellos y los de la fila superior.
f. Elabore una conjetura y aplíquela para construir dos filas más del triángulo. No olvide que las sumas de los números que coloque debe ser 32 y 64 respectivamente.
g. Investigue cuales son los coeficientes para los desarrollos de $(a+b)^2$ y $(a+b)^3$.
h. Observe los números del triángulo de Pascal y enuncie una conjetura acerca de la relación entre algunos de ellos y los coeficientes de cada desarrollo.

A continuación se explorarán algunas sucesiones numéricas, en busca de descubrir relaciones entre sus términos y describirlas de manera general.

Se entenderá por sucesión numérica, un conjunto de números ubicados en la primera posición, segunda, tercera y así sucesivamente. Cada número se conoce como término, denominándose enésimo término al número que está en la posición n.

Ejemplo: dada la sucesión numérica 3, 7, 11, 15...

Determinar:

- El 5^{o} término
- El 6^{o} término
- El 10^{o} término
- El 20^{o} término
- El enésimo término

Solución:

Al observar la sucesión numérica, se detecta que entre dos términos consecutivos hay una diferencia de 4. De manera que para obtener el quinto término se suma 4 a quince y se obtiene 19; de forma similar se determina que el sexto término es 23.

Para encontrar el décimo término, puede sumarse 4 sucesivamente a partir del sexto término y determinar que el número buscado es 39.

Para encontrar el término que está en la posición 20, este procedimiento resulta muy largo. Pero como entre 10 y 20 hay 10 posiciones y cada una representa un incremento de 4, puede agregarse a 39 el resultado de 4*10 y se obtiene 79.

Antes de buscar la forma de expresar el término que está en cualquier posición **n** es importante aclarar que no existe una forma única de representación, en este caso, se expresará en términos de la posición **n** que ocupan los términos.

Se sabe que:

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = 3 + 4(1) = 7$$
$$a_3 = 3 + 4(2) = 11$$
$$a_4 = 3 + 4(3) = 15$$

Tome en cuenta que a_1 representa al término que está en la posición 1, a_2 al que está en la posición 2, etc..

Observe que el número colocado entre paréntesis es una unidad menor que el subíndice que indica la posición. Así, puede afirmarse que:

$$a_8 = 3+ 4(7) = 31$$
$$a_{23} = 3+ 4(22) = 91$$
$$\vdots$$
$$a_n = 3 + 4(n-1) = 3+ 4n - 4$$

Por lo tanto, un término en cualquier posición **n** tiene la forma:

$$\boxed{a_n = 4n - 1}$$

Con esta expresión puede determinarse fácilmente cualquier otro término de la sucesión, por ejemplo a_{100}.

Actividad 6

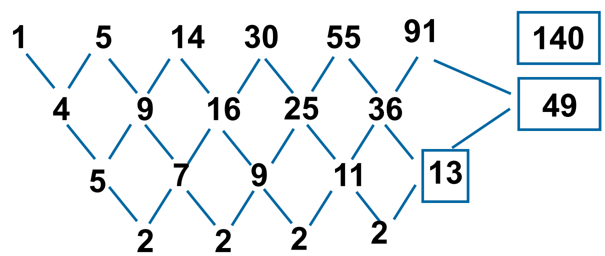
Dada la sucesión numérica: 72, 69, 66, 63.....

a. Determine el quinto y sexto término.
b. Explique cómo los obtiene.
c. Determine el décimo y el vigésimo término. Explique cómo los obtiene.
d. Encuentre una expresión que permita calcular cualquier término de la sucesión.
e. Explique el procedimiento que usa para determinarla.
f. ¿El cero forma parte de la sucesión? Justifique su respuesta.

En algunas series numéricas, el patrón que las define no es tan obvio como en los casos anteriores, lo cual dificulta el enunciado de la generalización.

El procedimiento conocido como *método de las diferencias finitas*, resulta de mucha utilidad; consiste en construir otras sucesiones con las diferencias entre los números de la serie dada, hasta obtener una sucesión constante.

Ejemplo E:
Dada la sucesión 1, 5, 14, 30, 55, 91... encontrar el siguiente término:



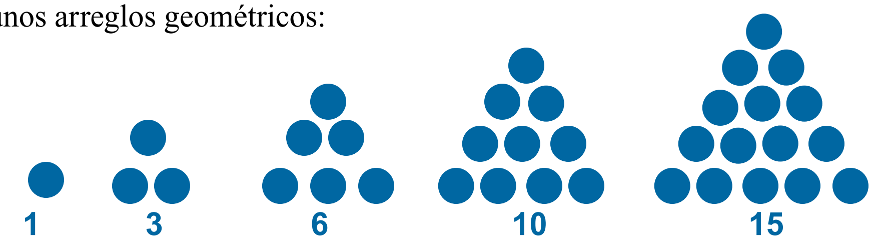
A partir de que las diferencias son constantes en la última fila, se infiere que en la fila superior el siguiente número después del 11, es 13. Luego, en la segunda fila el siguiente término es 49, que es el número que al restarle 13 da 36.
Finalmente, el número buscado tiene una diferencia de 49 con 91, por lo tanto, éste debe ser 140.
Para generalizar el proceso de encontrar cualquier término de la sucesión, observemos las primeras diferencias obtenidas y su relación con los números que las producen:

$$5 = 1+4 \quad = 1^2 + 2^2$$
$$14 = 1+4+9 \quad = 1^2 + 2^2 + 3^2$$
$$30 = 1+4+9+16 \quad = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$

Habrá detectado que cada término se puede expresar como una suma de cuadrados incluyendo al $1 = 1^2$. Veamos de donde proceden esos cuadrados: el caso del 1 no aporta mucha información. El segundo término es la suma de los cuadrados de 1 y 2; el tercero es la suma de los cuadrados de 1, 2 y 3. Esto es: ¡los cuadrados del número de términos!

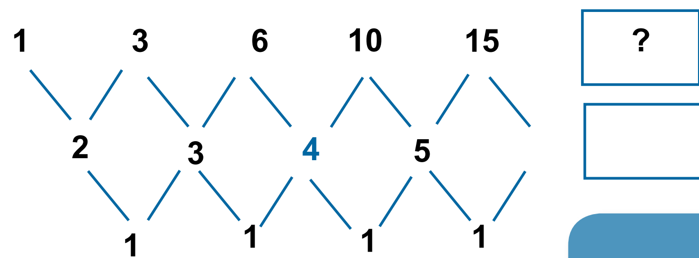
Entonces, cualquier término se obtiene sumando los cuadrados del número de términos contados hasta cada posición.

Ejemplo E:
Veamos algunos arreglos geométricos:



La sucesión de números mostrada se conoce como Números Triangulares, debido a su asociación con arreglos de este tipo . Determinemos el sexto y el séptimo número: observando el arreglo geométrico puede detectarse que cada triángulo agrega una fila de puntos al anterior . Por lo tanto, el sexto arreglo triangular agregará una fila de 6 y será 21; el séptimo agregará una fila de 7 y será 28.

Para encontrar cualquier número triangular, podemos aplicar el método de las diferencias finitas:



y note que :

$1 = 1$
$3 = 1 + 2$
$6 = 1 + 2 + 3$
$10 = 1 + 2 + 3 + 4$
$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$

Conclusión: cada número triangular se encuentra sumando el número de términos contados, incluyéndolo a él mismo.

Actividad 7

Se unirán pentágonos para formar arreglos, que podrían ser por ejemplo cercas de jardín. El tamaño se define como el número de pentágonos que se utilicen.

a. Use palillos o cerillos para formar los siguientes arreglos.

Arreglo	Tamaño	# de palillos
	1	5
	2	9
	3	13

b. Determine el número de palillos que se requiere para formar un arreglo de tamaño:

- 4
- 5
- 10
- 20
- n

En todos los casos justifique su respuesta.

Como nota histórica curiosa, cabe mencionar que a la edad de 9 años Karl Fiedrich Gauss, dedujo una expresión algebraica que permite calcular la suma de los números naturales de 1 hasta n .

Veamos como puede obtenerse una fórmula general, partiendo de un caso particular.

Ejemplo: hallar la suma de los números de 1 a 10. Para facilitar la escritura se representa esta suma por S_{10}, lo cual se lee: " suma de 1 hasta 10".

$$S_{10} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

Las propiedades de la suma de naturales, permiten escribir esta expresión como:

$$S_{10} = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

Si se suman las dos expresiones anteriores se obtiene:

$$\begin{array}{l} \ \ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\ 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\ \hline 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 \end{array}$$

Vemos que el doble de la suma buscada puede encontrarse sumando 10, once veces; esto es : $10 \times 11 = 110$; por lo tanto $S_{10} = 110 \div 2 = 55$

Note que para sumar del 1 al 10 efectuó: $\frac{10(10 + 1)}{2}$

Para encontrar la suma desde 1 hasta cualquier número n se puede utilizar el procedimiento anterior:

$$Sn = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots \ldots + (n - 2) + (n-1) + n$$
$$Sn = n + (n - 1) + (n - 2) + \ldots \ldots + 4 + 3 + 2 + 1$$

$$\begin{array}{l} \qquad 1 + \quad 2 + 3 + 4 + \ldots \qquad \ldots + (n - 2) + (n - 1) + n \\ n + (n - 1) + (n - 2) + \ldots \qquad \ldots \quad + 4 + 3 + \quad 2 + \ 1 \\ \hline n + \ n \qquad + \ n + \ldots \qquad \ldots + \quad n \ + \ n \ + \ n \end{array}$$

El doble de Sn puede hallarse sumando n, (n + 1) veces.

Esto es: $2Sn = n(n + 1)$

y entonces la fórmula general para una suma es:

$$Sn = \frac{n(n+1)}{2}$$

RAZONAMIENTO DEDUCTIVO

El proceso de razonamiento deductivo requiere de la aceptación de algunas afirmaciones sin comprobarlas. Recordará que en el capitulo anterior le propusimos investigar dichas afirmaciones, las cuales se conocen como Postulados o Axiomas.

Recordará también que todas las demás afirmaciones derivadas de ellas y que pueden demostrarse con ayuda de definiciones y la lógica deductiva se llaman Teoremas.

Aunque la generación y demostración de teoremas es trabajo de los matemáticos, es importante conocer la forma en que se construyen, ya que la matemática escolar, además de dotar de herramientas de cálculo, debe incluir entre sus propósitos, la reconstrucción de conocimientos y evidenciar la naturaleza del pensamiento matemático.

Pasos del razonamiento deductivo

1. **Explicitación de la formulación del problema a demostrar, (Muchas veces provienen de un razonamiento inductivo).**

2. **Utilización de las definiciones, postulados y teoremas probados anteriormente, y de la lógica matemática, para justificar y construir los procedimientos que produzcan los resultados buscados.**

3. **Conclusión.**

Los teoremas se enuncian como implicaciones o dobles implicaciones, por lo cual resultarán muy útiles los conocimientos adjuntos en la sección anterior.

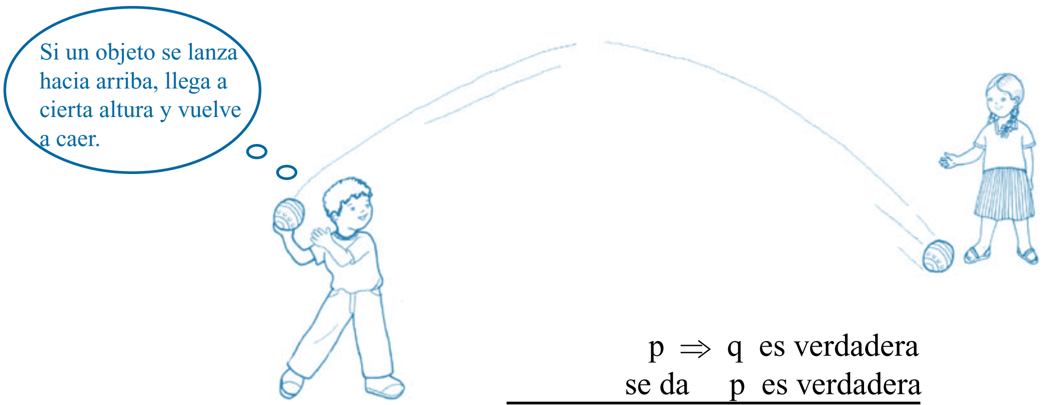
Esquemas de razonamiento o reglas de inferencia

Para obtener conclusiones verdaderas a partir de las premisas dadas, existen varias vías o formas de hacerlo, éstas se conocen como esquemas de razonamiento o reglas de inferencia. Aunque existen más formas, en esta sección nos limitamos a estudiar dos de ellas.

Modus Ponens

Este esquema de razonamiento también se conoce como *ley de separación* o *afirmación de la hipótesis*.

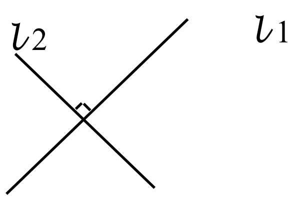
El esquema se presenta así : siempre que la implicación $p \Rightarrow q$ sea verdadera, y se compueba que p es verdadera, puede concluirse que q es verdadera.
Ejemplo J
En este esquema, la formulación inicial es una proposición de la forma si... entonces, que se considera verdadera. Si se cumple la primera proposición de la implicación, (esto es : un objeto es lanzado hacia arriba), se concluye la veracidad de q (llega a cierta altura y empieza a caer).



$p \Rightarrow q$		es verdadera
se da	p	es verdadera
se concluye que	q	es verdadera

Ejemplo I

Se acepta que: si el ángulo formado por la intersección de dos líneas rectas es de 90º, entonces son perpendiculares.



Se concluye que l_1 y l_2 son perpendiculares

Modus Tollens

Esta regla de inferencia también se conoce como *la ley de contraposición* o *negación de la conclusión.*

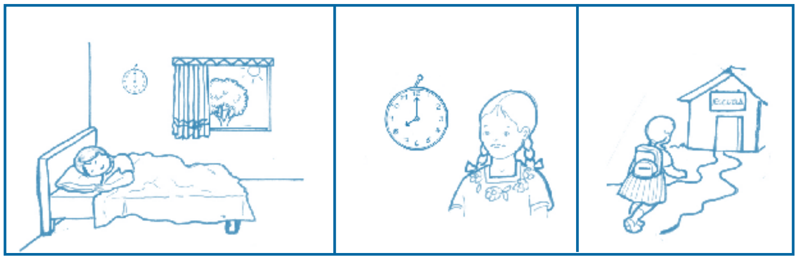
Este esquema de razonamiento tiene una estructura tal que si $p \Rightarrow q$ es verdadera y se comprueba que ~ q es verdadera, se puede concluir que ~ p es verdadera.

Se asume	$p \Rightarrow q$	verdadera
se verifica	$\sim q$	verdadera
se constituye que	$\sim q$	verdadera
además	$\sim q \Rightarrow \sim p$	*verdadera*

Ejemplo J

“Si $\underbrace{\text{quieres llegar temprano a la escuela}}_{p}$ $\underbrace{\text{debes levantarte a las 6:00 a.m.}}_{q}$”

La niña se levanta a las 8:00, no cumple q.
Por lo tanto, no quiere llegar temprano.



Ejemplo K
Si un número es impar entonces su última cifra es impar.
La última cifra de 524 no es impar, se concluye que 524 no es un número impar.

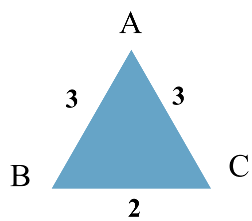
Se asume	$p \Rightarrow q$	verdadera
se verifica	$\sim q$	verdadera
se concluye que	$\sim p$	verdadera
además	$\sim q \Rightarrow \sim p$	verdadera

Actividad 10

Analice las siguientes expresiones e identifique el esquema de razonamiento con que se formulan

a. Los metales tienen superficies brillantes y son conductores de la electricidad y el calor. La madera no tiene esas carácteristicas. Por lo tanto, la madera no es metal.
b. Si un triángulo es isósceles, entonces dos de sus ángulos internos tienen la misma medida. El triángulo ABC de la figura es isósceles.

   Por lo tanto, tiene dos ángulos internos de la misma medida.



ACTIVIDADES PARA REALIZAR CON LOS ALUMNOS

Después de revisar algunos conceptos fundamentales, en las secciones de este capítulo le presentamos algunas actividades para realizar con los niños. Es aconsejable que inicie el reconocimiento de patrones en series numéricas sencillas, puede combinarlas con figuras geométricas.

De hecho, las actividades que usted realizó pueden adaptarse para 5º y 6º grados, pidiendo solamente que los niños agreguen números a la serie y describan el patrón con palabras, omitiendo la construcción de fórmulas.

Actividad 1

Modalidad : individual.

Completar las series numéricas siguientes

a. 1, 2, 4, 7, ___, 16, ___, 29, ___, ___...

b. 1, 2, 2, 1, 2, 3, 3, 1, ___, ___, 4, ___, 1, ___, ___, ___,...

c. 3, 2, 1, 3, ___, 1, ___, ___, ___,...

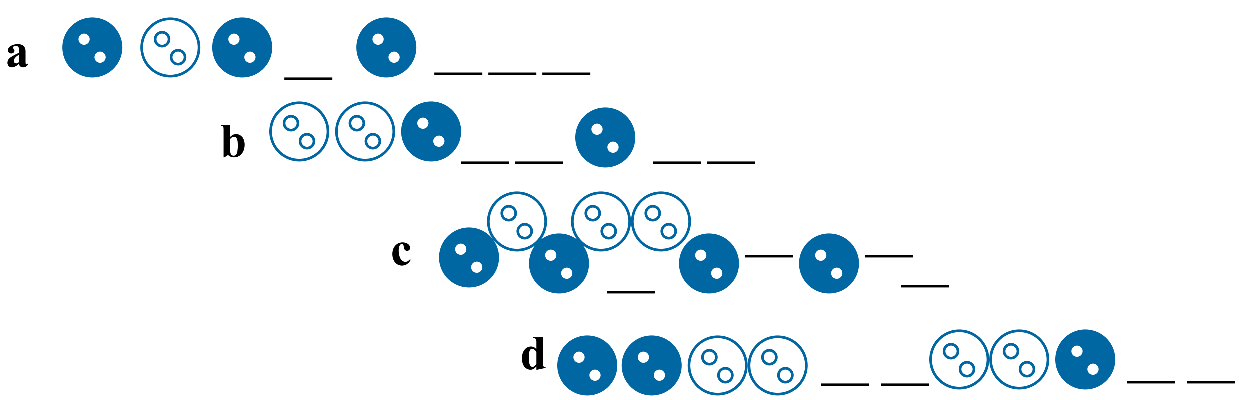
d. ___,___,___, ___, ⬟, 5, ■, 4, ▲, ___,

Actividad 2

Materiales: botones blancos y negros, círculos de papel blancos y negros (Puede usar semillas, corcholatas, hojas, etc.).

Modalidad: individual.

Procedimiento: pegue en el pizarrón círculos blancos y negros e indique a los niños que completen el arreglo usando botones y que continúen la serie. En cada caso, solicite que expliquen el procedimiento utilizado.



En vista de que los casos anteriores las series que pueden formarse no son únicas, es importante que cualquiera que sea la respuesta que den los niños, explique el patrón que utilizó para formarlas.

Actividad 3

a. Solicite a los niños que observen el aula y busquen la formación de patrones en figuras que se repiten, por ejemplo: en el piso, techo, ventanales, etc., y que los dibujen en su cuaderno. Luego pida que algunos expongan sus observaciones.

b. Indique a los alumnos que hagan un trabajo semejante en toda la escuela y en su casa.

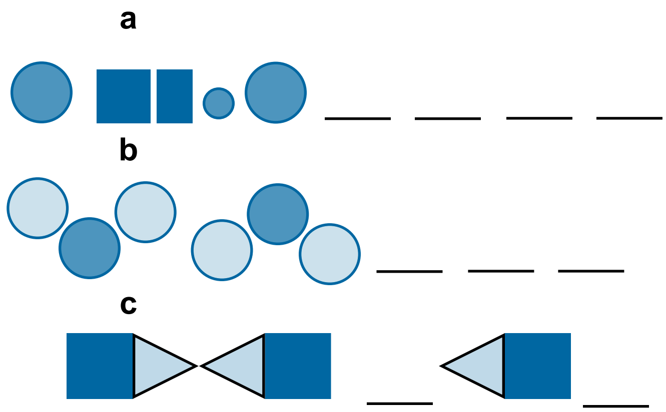
c. Solicite a los niños que visiten un parque, una iglesia y un edificio público y que busquen repetición de formas geométricas, que las dibujen en sus cuadernos.

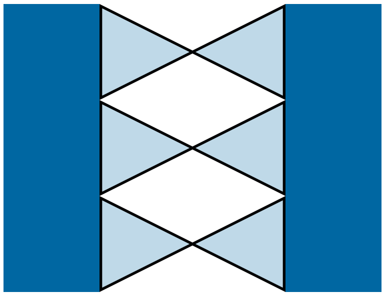
Actividad 4

Materiales: juego de figuras geométricas, formado por círculos, cuadrados, rectángulos, triángulos; que puedan distinguirse en tamaño grande y pequeño, de cualquier color.

Procedimiento: forme en el pizarrón algunas secuencias y pida a los niños que agreguen figuras.

Pida a los niños que reproduzcan algunas figuras como las mostradas a la izquierda, utilizando otras figuras geométricas:





Actividad 5

Materiales: retazos de tela estampada, tijeras, goma.
Modalidad de trabajo: pareja.
Procedimiento:

a. Cada pareja contará con 6 retazos de tela los cuales observarán para tratar de descubrir patrones en su diseño.

b. Indique a los niños que observen y describan los retazos.

c. Cada miembro de la pareja tomará tres retazos y pegará un trozo en su cuaderno con la descripción del patrón observado, y dibujará dos figuras más similares a las observadas en la tela.

Observación: Esta actividad se ha enriquecido mucho cuando los niños han llevado retazos de telas típicas usados en su región. Si tiene esa oportunidad, aprovéchela para evidenciar la presencia de la matemática en distintas expresiones artísticas y culturales.

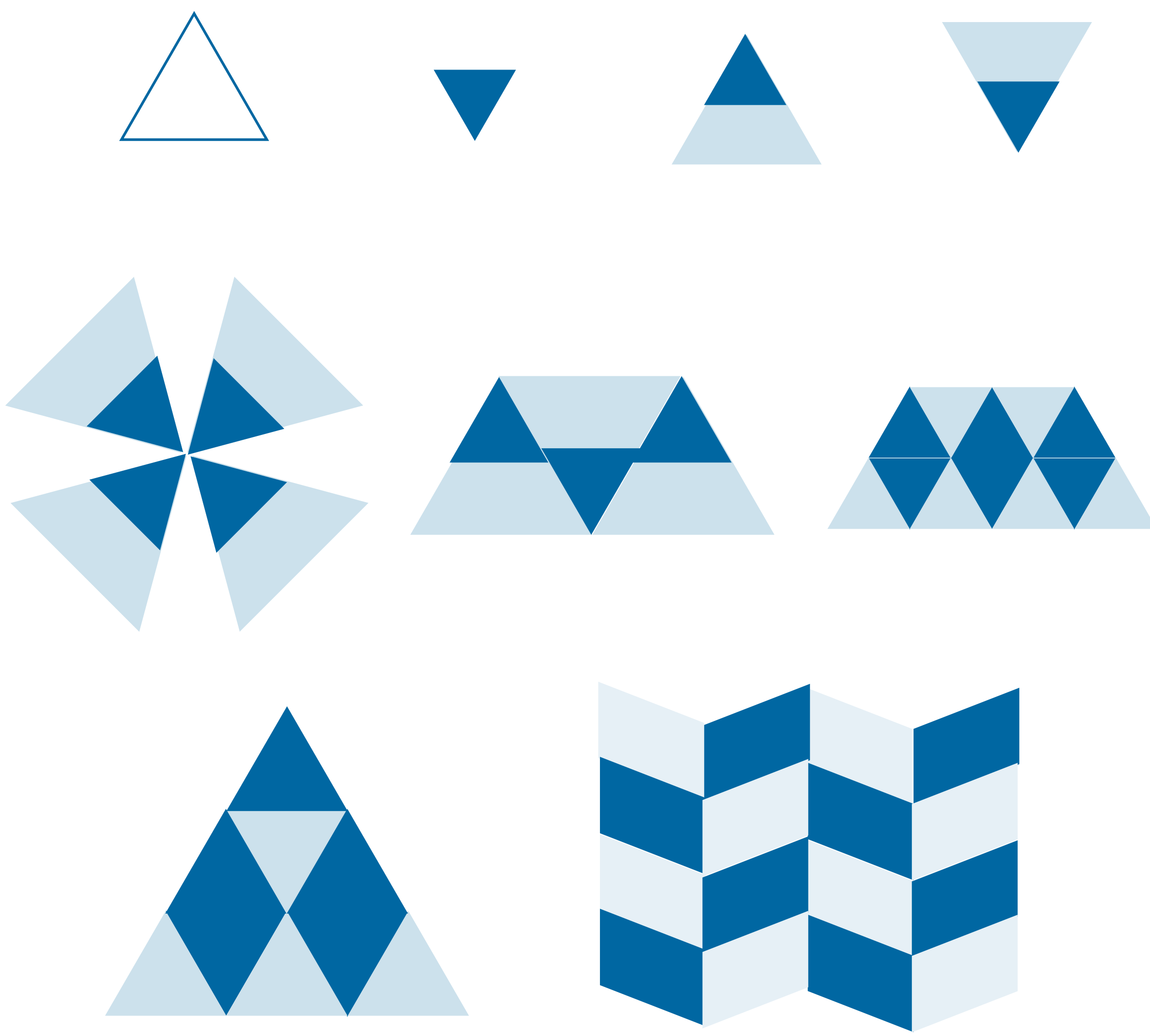
Haga preguntas para que los niños describan otros elementos que incluyan patrones geométricos como : barriletes, juguetes, pasteles, trajes, etc.

Actividad 6

Puede presentar a los niños figuras como las mostradas, pedirles que las reproduzcan y que creen otras. Motívelos para que formen diseños cada vez más complejos a partir de formas sencillas.

A la par de la formación de patrones, estas actividades pueden aprovecharse para que los niños desarrollen su creatividad y mejoren su identificación de las distintas figuras usadas. Llame a cada figura por su nombre e insista en que ellos lo hagan.

Para que los niños encuentren atractivo el reconocimiento de patrones, puede proponer arreglos como los siguientes:



En los grados intermedios hemos ensayado actividades de reconocimiento de patrones geométricos que implican conceptos como traslación, rotación y reflexión o inversión.

Actividad 7

Materiales: figuras usadas en la actividad 3, y letras L de colores diferentes en el anverso y reverso.

Modalidad de trabajo: trabajo individual.

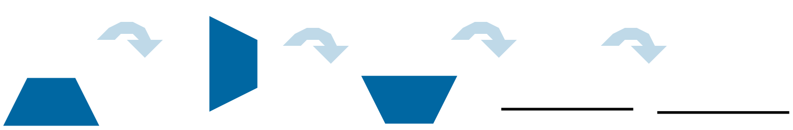
Procedimiento:

a. Explicar a los niños que pueden formar patrones con una misma figura, la manera más fácil es repetirlo en varias direcciones.

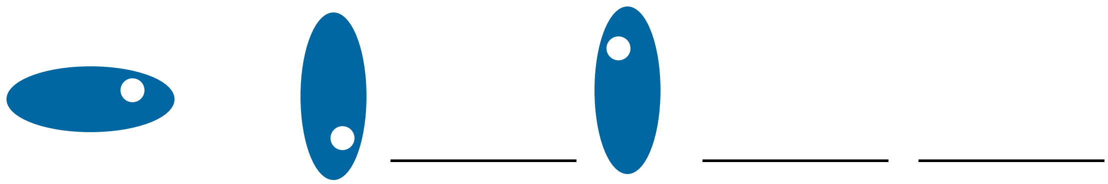
b. Pídales que formen patrones trasladando una o varias figuras.

c. Indague acerca de los conocimientos que tienen los niños sobre “ girar” o “ rotar” para explicar que se tomara un giro como el movimiento sobre una trayectoria circular.
Inicialmente pueden usarse sólo giros de vuelta y hacia la derecha.
Es preferible usar figuras como el trapecio, para evidenciar la rotación.

Variante:



Después de este primer entrenamiento, puede avanzar en la relización de otros giros . Solicite a los niños que completen la serie.



d. El tercer tipo de movimiento se conoce como reflexión respecto a una línea llamada eje de simetría. También se conocen como inversiones, ya que cada movimiento muestra el lado inverso de la figura, justamente como "darle vuelta a la tortilla".

Los mejores resultados con esta actividad los hemos obtenido usando figuras como letras, L. T, J, etc los cuales son de colores diferentes en su anverso y reverso.

En los últimos grados del nivel primario se continua el trabajo con el reconocimiento de patrones combinando los movimientos estudiados y agregando series numéricas.

Actividad 8

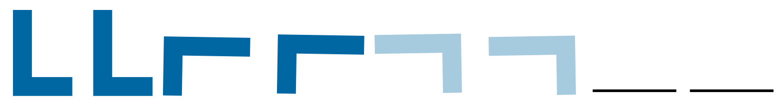
Se pretende que los niños de los últimos grados de primaria, describan patrones con estructura más compleja.

Materiales: figuras utilizadas en actividad 5.
Modalidad de trabajo: individual.
Procedimiento:

a. Proponga a los niños las siguientes series de figuras, para que agreguen las que siguen y describan el patrón que los rige.
b. Solicite a los niños que combinen los tres movimientos en el orden que deseen y que dibujen la serie de figuras . Luego, anímelos para que ensayen con rotaciones en sentido contrario, de media vuelta, traslaciones verticales o en diagonal, etc. .

Consideramos que la serie, actividades propuestas, son suficientes para brindarle una idea clara y amplia acerca de las posibilidades para explorar el razonamiento inductivo.

A. 

B. 

En cuanto al razonamiento deductivo, las principales dificultades están asociadas con el grado de generalidad y abstracción que requieren. Las actividades que hemos ensayado son aquellas en las cuales se dan reglas que pueden formularse como implicaciones, y que para fines del juego son aceptadas como válidas por los jugadores. A partir de la observación de que no se cumple la conclusión se infiere la falsedad de la premisa.

Actividad 9

Materiales: dado.
Modalidad de trabajo: pareja.
Procedimiento:

a. Indicar a los niños una regla para el juego, por ejemplo: si cae un número par, el lanzador gana y se anota el número de puntos que salió en la tirada del dado.
   Cada jugador construye una tabla que muestre sus resultados en cada tiro. El que acumule más puntos en cinco tiros, gana el juego.
b. Los miembros de cada pareja se intercambian con los de otra, llevando consigo las tablas en que anotaron los resultados del juego anterior. Cada participante esconde su tabla e indica al otro en cuántos tiros perdió. El otro trata de descubrir el número que cayó en cada caso. Por cada número se tiene una sola oportunidad. Gana el que adivine más números.

Para ilustrar lo anterior, supongamos que el jugador A perdió en el primero y en el tercer tiro. El otro trata de descubrir qué número obtuvo, razonando así: si perdió, no obtuvo un número par, por lo cual debe decidir entre 1, 3 y 5.

Esta actividad puede servirle de modelo para que usted diseñe otras .

SUGERENCIAS DE TRABAJO

Aprendiendo Matemática

a. Escriba tres proposiciones que sean verdaderas y tres que sean falsas. Forme con ellas tres conjunciones y tres disyunciones, determinando en cada caso si la expresión formada es verdadera o falsa. Es importante que explique su respuesta.

b. El producto de 1089 y los primeros números dígitos generan patrones numéricos interesantes. ¿Continúa este patrón para el producto por 5, 6, 7, 8 y 9?

Observe que:

1 * 1089 = 1089
2 * 1089 = 2178
3 * 1089 = 3267
4 * 1089 = 4356

Para ponerse a pensar.

a. Reúnase con algunos compañeros para resolver el siguiente problema:
Una señorita y su compañero son estudiantes de magisterio, uno de los dos tiene el pelo negro y el otro es rubio. Juegan a las adivinanzas y dicen: "Yo soy un chico" dice la persona de pelo negro; "yo soy una chica" dice la persona rubia. Si al menos uno de los dos ha mentido, quien tiene el pelo negro y quien es rubio.
b. Analice un ejemplo de razonamiento inductivo que haya realizado recientemente en su vida diaria. Identifique sus suposiciones, observaciones y conjeturas. ¿Fueron válidas sus conclusiones?

Para conocer cómo piensan los niños.

a. Pida a los niños que analicen el siguiente texto, identifiquen conjunciones y disyunciones, explicando su opinión personal sobre lo que expresan.
En todas las circunstancias, el niño debe ser de los primeros que reciban protección y socorro. El niño debe ser protegido de cualquier forma de abandono, crueldad o explotación, y no se le permitirá trabajar antes de una edad mínima adecuada.

b. Proponga el siguiente problema a un grupo de niños y registre en su texto paralelo, las estrategias que utilicen, preguntas que hagan; si detecta dificultades, descríbalas.

Un campesino debe transportar su cabra, un fardo de heno y un león. En su recorrido debe atravesar un río en una lancha en las que sólo pueden viajar dos y el conductor. Explique cómo hace el campesino para pasar al otro lado del río sin que la cabra se coma el heno ni el león se coma a la cabra. Se supone que el león no se comerá al campesino ni al conductor.

Actividades didácticas.

a. Para diseñar algunas actividades que involucren conjunciones y disyunciones, investigue lo siguiente: productos que sólo se cultiven en su región, que se cultiven tanto en su región como en otras regiones, que no se cultiven en su región. Con esa información, diseñe actividades para los niños, dando instrucciones en forma de conjunciones y disyunciones, de manera que obtenga como respuesta la información que recabó. Si los niños son pequeños, puede incluir los dibujos para que los pinten o los marquen de alguna manera. Por ejemplo: colorea las frutas que se cultiven en tu comunidad y que te guste comerlas.

b. Seleccione algunos anuncios de periódicos y analícelos en busca de identificar los argumentos usados. Diseñe instrucciones para que los niños los analicen críticamente y emitan su opinión al respecto.

Lecturas complementarias.

a. Para complementar el estudio del tema le sugerimos que investigue las negaciones de disyunciones y conjunciones. Con base en lo que aprenda, construya las negaciones de los ejemplos que propuso en el inciso 1.a

b. Investigue las negación de la implicación y doble implicación

CAPÍTULO III

SISTEMAS DE NUMERACIÓN

INTRODUCCIÓN

> *Los números son la materia prima de la Matemática. Está en la esencia de todas las manifestaciones del Universo.*
> *Conclusión: ¡Los números son la esencia del Universo!*

El concepto de número surge en relación con la necesidad del hombre de contar y representar cantidades. Para comunicar la idea de cantidad fue necesario escribirla de alguna manera, lo cual originó el uso de distintos símbolos para representar un mismo número. Por ejemplo, para representar el número de planetas que forman nuestro sistema solar, se puede escribir:

9	en sistema de base diez
IX	en sistema romano
●●●●	en sistema Maya
1001	en sistema binario
IIIIIIIII	en sistema egipcio.

Es importante notar, que aunque la cantidad de planetas es la misma, las formas de representarla son distintas porque se han utilizado distintos sistemas de numeración.

Este capítulo está destinado a profundizar en el estudio de algunas propiedades de los números, por lo cual es conveniente recordar que muchas de ellas son intrínsecas a su propia naturaleza, pero otras dependen de la forma de representarlos y escribirlos; por lo cual se revisarán los aspectos fundamentales referentes al valor posicional y sus implicaciones en la realización de operaciones básicas.

Particularmente se proponen actividades que permitan dotar de significado a expresiones conocidas como: “sumar llevando”, “restar prestando”. Asimismo, se proponen explicaciones para acciones realizadas en la multiplicación y la división.

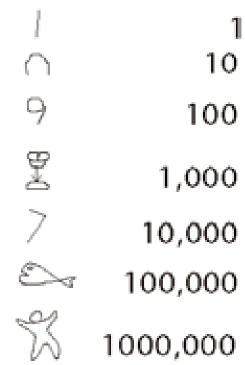
Sistemas de numeración

Inicialmente puede aceptarse la siguiente definición:

Un sistema de numeración es un conjunto de signos y símbolos que se combinan para representar cualquier cantidad.

ACTIVIDADES PARA EL DOCENTE

Entre los sistemas de numeración se encuentran aquellos que tienen un símbolo para cada cantidad y siempre representan el mismo valor independientemente de su ubicación, por lo cual se les llama no posicionales.



Entre estos sistemas se encuentran el romano y el egipcio los cuales tienen carácter aditivo, es decir, los valores individuales de cada símbolo se suman para obtener el valor total del número representado.

Para ilustrar su funcionamiento, le proponemos que continúe con la elaboración de su texto paralelo, realizando la siguiente actividad:

Actividad 1

Cuando Marco Antonio y Cleopatra se preparaba para defender Egipto del ataque romano, él decidió guiar al ejército egipcio y solicitó por escrito a la reina que le diera:

CCC barcos y MMMDDDCCCLLLXL hombres.

I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1,000

Cleopatra revisó sus libros y respondió también por escrito, que podía darle:

 Barcos y  hombres.

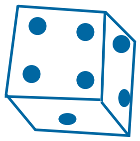
Determine si Marco Antonio obtuvo lo solicitado.

En la actualidad, son de mucha aplicación los llamados sistemas posicionales, los cuales además de un conjunto de símbolos cuyo valor depende de la posición en que aparezcan, incluye un número llamado *base,* que indica el número de símbolos utilizados y el número de elementos de una categoría que se requieren para constituir la siguiente.

Entre ellos se encuentran el decimal, el Maya y el binario, de los cuales especialmente el decimal es ampliamente estudiado en el nivel primario, y por lo tanto, el conocimiento de sus características y las operaciones que en el se realizan, se considera fundamental en la formación matemática del docente de este nivel.

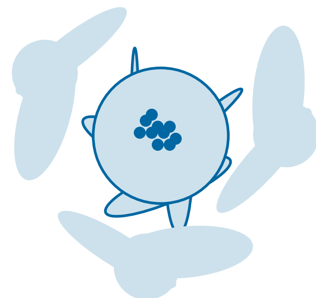
Para evidenciar los principios de base y posición, que caracterizan un sistema posicional de numeración, le proponemos que realice algunas actividades.
Resaltamos que en Guatemala debido a las raíces Mayas y al impulso de la educacion pluricultural y multilingüe es importante para los docentes en formación conocer los fundamentos del sistema de numeración Maya.

Actividad 2



Materiales: corcholatas que puedan diferenciarse por color, por ejemplo: 50 azules, 50 anaranjadas, 20 rojas y 10 verdes. Se requiere además de un dado.
Modalidad de trabajo : Grupos de tres personas.
Instrucciones:
Establecer turnos para administrar las corcholatas.
Cada participante debe dibujar en un papel un arreglo por columnas para colocar las corcholatas de cada color, podría ser por ejemplo:

Verde	Rojo	Anaranjado	Azul



Primera opción

Convenio: las corcholatas azules valen 1, una anaranjada vale 2 azules, 1 roja vale dos anaranjadas y una verde vale dos rojas.
Antes de empezar a jugar es importante que se establezca a cuántas azules equivalen 1 roja y una verde.

Procedimiento: cada jugador lanza por turno el dado y recibe tantas corcholatas azules como puntos obtenga.

Cuando un jugador junte dos azules debe cambiarla por una anaranjada; cuando tenga dos anaranjadas debe cambiarlas por una roja y así sucesivamente.

Gana el jugador que primero obtenga una verde y determine el número total de azules que acumuló. Cada participante dibuja tanto el arreglo formado en la tabla como el total de azules que representa.

Segunda opción.

Convenio: las corcholatas azules valen 1, las anaranjadas valen cuatro azules, las rojas valen cuatro anaranjadas y las verdes equivalen a cuatro rojas.
Antes de iniciar, es conveniente determinar a cuántas azules equivale una roja y una verde en este caso.

El procedimiento es similar, salvo que los cambios se hacen al juntar cuatro y gana el primero que adquiera tres verdes. Al igual que antes, el ganador debe indicar cuántas azules acumuló, escribiendo de nuevo tanto el arreglo como el total de azules obtenido.

Tercera opción

Convenio: las corcholatas azules valen 1, las anaranjadas valen diez azules, las rojas valen 10 anaranjadas. Para no alargar mucho el juego, se sacan las verdes. Es posible que se requieran más corcholatas de los otros colores.

Antes de iniciar, es conveniente determinar a cuántas azules equivale una roja.

El procedimiento es el mismo, salvo que los cambios se hacen al ajustar 10 y gana el primero que obtenga una roja. Al igual que antes, el ganador debe indicar cuántas azules acumuló.

Actividad 3

Se usará el mismo material que en el caso anterior y pueden jugarse las tres opciones descritas.

El cambio consiste en que cada jugador recibe corcholatas antes de iniciar el juego y debe entregar tantas corcholatas azules como indique el dado, de manera que si por ejemplo, debe entregar tres azules y sólo tiene una, tendrá que canjear alguna de otro color para obtener más azules y continuar el juego.

Gana el primer jugador que logre deshacerse de todas.

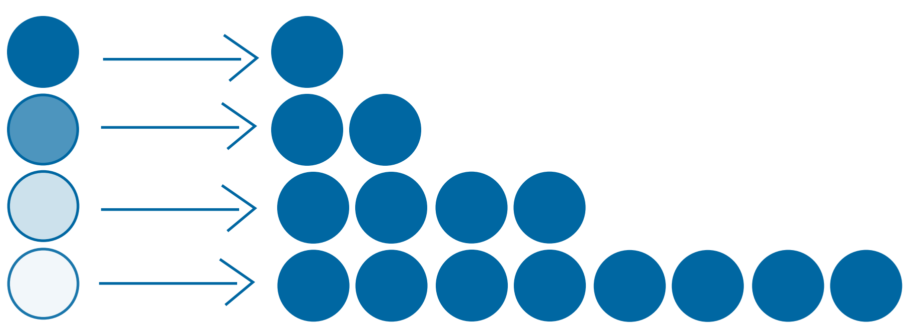
Se propone que para jugar en la primera opción, cada jugador reciba una de cada color.

En la segunda, 1 verde y tres de los otros colores.
Para la tercera, puede ensayarse con 1 roja, 5 anaranjadas y 9 azules.

No debe olvidar que estas reglas son convencionales, le invitamos a que formule otras y explore qué sucede. Por ejemplo, podría experimentar con cambios de 5 por 1, 20 por 1, etc; o bien cambiando el número de corcholatas que recibe cada jugador en la actividad 2.

Es importante que registre sus observaciones en su texto paralelo

Después de realizar estas actividades habrá notado que la equivalencia establecida entre las corcholatas utilizadas en el primer caso, el total de azules puede determinarse sumando la equivalencia de las otras en azules.



Además, de cada color sólo podía haber una, pues al juntar dos tenía que cambiarse por otro color.

En la segunda opción, las equivalencias en azules eran: 1, 4, 16 y 64; sólo podían acumularse 3 de cada color, pues con cuatro se adquiría la del valor siguiente.

En la tercera opción las equivalencias propuestas, fueron: 1, 10 y 100; el número máximo de corcholatas de cada color era de 9, pues con 10 se adquiría una del valor siguiente.

¿Qué tienen en común las series de números mostrados? Habrá descubierto que son potencias de dos, de cuatro y de diez, respectivamente. Por tal razón, se exploraron los fundamentos de los sistemas de base 2, base 4 y base 10.

De la actividad mostrada puede notarse también que quince azules se representan:

1111 en base 2;
31 en base 4 y
15 en base 10.

Veámoslo en detalle:

Para evitar confusiones si el número está escrito en una base distinta de 10, se acostumbra indicarlo con un subíndice

33_4

$$1111_2 = \mathbf{1} \times 8 + \mathbf{1} \times 4 + \mathbf{1} \times 2 + 1 = \mathbf{1} \times 2^3 + \mathbf{1} \times 2^2 + \mathbf{1} \times 2^1 + \mathbf{1} \times 2^0$$

$$33_4 = \mathbf{3} \times 4 + \mathbf{3} \times 1 = \mathbf{3} \times 4^1 + \mathbf{3} \times 4^0$$

$$15 = \mathbf{1} \times 10 + \mathbf{5} \times 1 = \mathbf{1} \times 10^1 + \mathbf{5} \times 10^0$$

Es importante notar que las cifras de un número indican el número de grupos que se toman de cada valor; así en el primer caso se observa que se toma un grupo de 8 unidades, un grupo de 4, un grupo de dos y un grupo de una. En el segundo caso se toman 3 grupos de cuatro unidades y 3 grupos de una y en el tercer caso se toma un grupo de 10 unidades y 5 de una.

Obsérvese además que en los tres casos, el número de cifras que tiene el número coincide con el número de potencias que se requieren, además el mayor de los exponentes es una unidad menor que dicho número de cifras, descendiendo desde ese número hasta cero.
En general, si un número escrito en determinada base tiene k cifras, puede expresarse usando k potencias de esa base, en las cuales los exponentes variarán desde k-1 hasta cero. Veamos, por ejemplo 1492: su número de cifras k = 4 implica que deben usarse 4 potencias de 10, que son 10^3 10^2, 10^1 y 10^0 . Las cifras del número son enteros mayores que cero, que pueden representarse por:

$$r_3 = 1,\ r_2 = 4,\ r_1 = 9 \text{ y } r_0 = 2,$$

de tal manera que

$$\begin{aligned} 1492: \quad & 1 \times 10^3 &= 1000 \\ & + 4 \times 10^2 &= 400 \\ & + 9 \times 10^1 &= 90 \\ & + 2 \times 10^0 &= 2 \end{aligned}$$

ACTIVIDADES PARA REALIZAR CON LOS ALUMNOS

Para poder comprender el origen de los algoritmos que aprenden, los niños necesitan realizar diversas actividades, algunas similares a las que se plantearon anteriormente, pero enfatizando el trabajo en base 10 y algunas otras que se proponen utilizando material concreto.

En este punto consideramos importante mencionar, que el uso de material concreto tiene particular importancia, especialmente en la fase inicial de la elaboración de nuevos conocimientos, en que pueden modelarse situaciones materialmente diferentes pero matemáticamente equivalentes.

Sin embargo, no debe perderse de vista que el material concreto es un auxiliar, no un fin en sí mismo y en consecuencia su uso debiera orientarse en la siguiente secuencia:

- Manipuleo de los objetos.
- Acciones realizadas sobre los objetos.
- Descubrimiento de relaciones.
- Interiorización de relaciones.
- Formulación de conceptos.
- Integración del concepto con conceptos anteriores.
- Aplicación de la estructura conceptual en nuevas situaciones.

Al respecto, opina un educador:

“El material concreto más eficiente es aquel cuyo uso es necesario por muy poco tiempo”

Las actividades propuestas tienen por objetivo familiarizar a los niños con las características del sistema decimal de numeración y ensayar estrategias para iniciarlos en la realización de operaciones, especialmente las conocidas como “sumar llevando” y “ restar prestando”.

Se incluye la explicación del “corrimiento” en la multiplicación de cantidades con dos dígitos.

Es recomendable que las realice primero y luego las proponga al menos a dos grupos de niños, registrando en su texto paralelo sus observaciones referentes a la actitud de los participantes, preguntas que hagan, obstáculos que encuentren, logros de aprendizaje, etc..

Si descubre que debe adaptar el lenguaje, agregar o eliminar instrucciones o cualquier cambio que implique su mejoramiento, no dude en hacerlo.

Comparta con otros compañeros sus experiencias.
Para que pueda usarlas en otras ocasiones, incluya en su texto las modificaciones que realice.

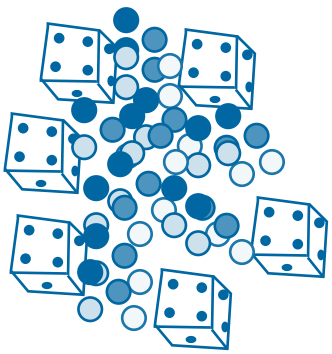
La primera actividad es muy similar a las realizadas anteriormente, sólo que difiere en el nivel de dificultad planteado y en la formalización posterior, la cual se omite con los niños.

Actividad 1

Materiales: corcholatas que puedan diferenciarse por color, por ejemplo: 50 azules, 50 anaranjadas y 20 rojas. Se requiere además de un dado.

Modalidad de trabajo: grupos de tres.

Instrucciones: agrupar a los niños en equipos y pedirles que establezcan turnos para administrar las corcholatas. Indicarles que cada participante debe dibujar en un papel un arreglo por columnas para colocar las corcholatas de cada color, podría ser por ejemplo:



Verde	Rojo	Anaranjado	Azul

Primera opción.

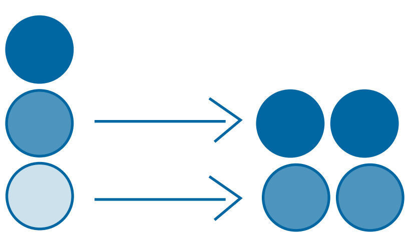
Convenio: las corcholatas azules valen 1, una anaranjada vale 2 azules, 1 roja vale dos anaranjadas.

Antes de empezar a jugar es importante que los niños establezcan a cuántas azules equivale 1 roja.

Procedimiento: cada jugador lanza por turno el dado y recibe tantas corcholatas azules como puntos obtenga. Cuando un jugador junte dos azules debe cambiarlas por una anaranjada; cuando tenga dos anaranjadas debe cambiarlas por una roja.

Gana el jugador que primero obtenga una roja y determine el número total de azules que acumuló.

Nota: la experiencia nos ha mostrado, que los niños se familiarizan mejor con las instrucciones del juego, si el maestro juega primero con un equipo para que todos observen la aplicación de las reglas



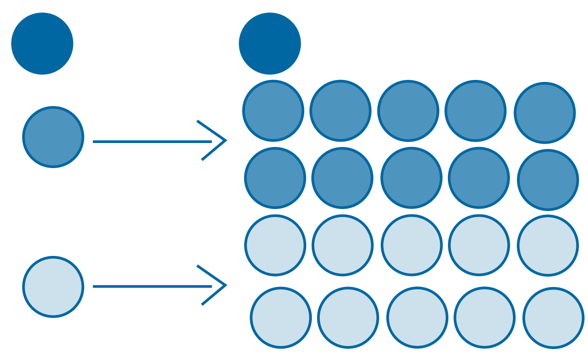
Con los niños pequeños, se han observado muy buenos resultados usando sólo dos colores de corcholatas, detectándose un rápido desarrollo de procesos de conteo..

Segunda opción

Convenio: las corcholatas azules valen 1, una anaranjada vale diez azules y una roja vale 10 anaranjadas.

Las reglas son iguales que en el caso anterior, salvo que los cambios son por diez unidades.

Puede aprovecharse el juego para mencionar que una corcholata anaranjada vale por una decena de azules y que una roja vale por una decena de anaranjadas y de esta manera, que los niños adquieran el vocabulario específico mediante la práctica.



Actividad 2

Materiales: se requiere igual número de corcholatas, pero ahora el dado que se usará debe estar pintado de los tres colores que se usan; por ejemplo: 1 y 2 pintados de rojo, 3 y 4 de anaranjado y 5 y 6 pintados de azul.

Convenio: una anaranjada vale 10 azules y una roja vale 10 anaranjadas.

Instrucciones: cada jugador por turno lanza el dado y obtiene el número que sale de corcholatas del color indicado, estando obligado a hacer el cambio por la unidad siguiente, por ejemplo: si cae tres anaranjado deberá cambiar dos por una roja y quedarse con una. Es importante que cada participante se vea obligado a tomar la decisión de cambiar, por lo tanto debe revisarse que primero reciban lo que les corresponda y luego soliciten el cambio deseado.

Gana el que después de tres turnos tenga las que equivalgan a más azules.
Si se analiza detenidamente, en las actividades anteriores ya se está realizando la "suma llevando", veamos: si en la actividad 1 se tienen tres azules, dos se cambian por una anaranjada y se "lleva" con las de este color, quedando una azul.

En la segunda actividad, si acumulan 12 azules, 10 se cambian por una anaranjada y se agrega a ese grupo, quedando 2 azules. Este hecho es la materialización de la frase famosa " pongo dos y llevo una".

Previo a trabajar las operaciones propiamente dichas, proponemos insistir en la parte conceptual, avanzando hacia la escritura de cantidades usando base diez, empezando con números de dos cifras y avanzando hasta los de tres.

Actividad 3

Esta actividad empieza a relacionar la representación del número, usando corcholatas con la escritura correspondiente en el sistema decimal.

Materiales: corcholatas azules y anaranjadas.
Modalidad de trabajo: parejas. Utilizar la tabla
Convenio: 1 anaranjada vale 10 azules.

Verde	Rojo	Anaranjado	Azul
		○○○	●

Cada participante coloca en la casilla del otro tantas corcholatas como quiera y sea permitido (no más de nueve).

Cada uno debe escribir el número que representa y decirlo al otro indicando cuántas decenas y unidades posee. Por ejemplo: el niño que recibe en su casilla el arreglo mostrado, debe escribir 31 y decir "treinta y uno tiene 3 decenas y una unidad".

Jugar durante cinco turnos. Pierde el que se equivoca.

Una variante de esta actividad es que cada niño escribe en un papel tres números de dos cifras, los doblan y los intercambian. Se da la señal de inicio y cada uno debe representarlos con corcholatas. Gana el que primero forme los números correctamente. Es importante que los dos participantes revisen la validez de los arreglos formados. Tres turnos serán suficientes.

Para trabajar en la comparación de los números, se propone lo siguiente: todas las corcholatas (azules y anaranjadas) se depositan en una caja profunda, de manera que los niños no las vean.

Se acuerda que gana quien forme el número mayor o menor.

Cada niño toma un puñado, las coloca en la casilla que corresponde y luego escribe el número.
Gana el que forme el número mayor o menor de acuerdo con lo convenido. En caso de empate, los niños deciden que hacer.
Toda la secuencia anterior debe trabajarse incluyendo las corcholatas rojas que valen 10 anaranjadas y ampliando la tabla a las centenas.

Actividad 4

Materiales: juego de 40 tarjetas, 4 de cada número del 0 al 9.
Modalidad de trabajo: en pareja.
Instrucciones: al principio del juego debe fijarse si gana el que saque el número mayor o menor, fijar mecanismo para establecer los turnos y qué se hace en caso de empate.
Mezclar las cartas y colocarlas en mazo volteadas hacia abajo.
De acuerdo con los turnos establecidos, ambos participantes levantan dos cartas y quien forme el número mayor (menor) se queda con las cuatro.

Después de cinco turnos gana el que tenga más cartas.
Esta variante avanza en la escritura de números de tres cifras.
Para segundo o tercer grado, pueden tomarse tres cartas y formar el número mayor (menor). Luego puede jugarse a levantar cuatro cartas.

Actividad 5

Materiales: corcholatas azules, anaranjadas y rojas. Una anaranjada vale diez azules y una roja diez anaranjadas. dos dados pintados así: 1,2,3 anaranjado; 4,5,6 azules.

Modalidad de trabajo: pareja.

Procedimiento: cada participante lanza por turno los dos dados, recibiendo la cantidad y el color de corcholatas que indiquen los dados.

Las cantidades se ubican en la tabla que se ha venido utilizando, y a la par se escribe el número expresado en decenas y unidades. Después de tres turnos se obtiene el total y hasta el final se hace el canje.
Por ejemplo, un jugador obtiene en sus tres turnos:

Turno N°	Anaranjado	Azul	Número
1	○○○	●●●●●	35= 3 decenas + 5 unidade
2	○○○	●●●●●●	36= 3 decenas + 6 unidades
3	○	●●●●	14= 1decenas + 4 unidades
total	7	15	

En total se obtuvieron 7 anaranjadas y 15 azules, las cuales representan:

7 decenas + 15 unidades. Al igual que en casos anteriores se cambian 10 azules por una anaranjada, con lo cual sumarán 8, quedando 5 unidades. Por lo tanto, la suma de los tres tiros es 85.

Variante: Puede incluirse la suma con centenas, incluyendo las corcholatas rojas y pintando el dado 5 y 6 de azul, 3 y 4 anaranjado y 1, 2 de rojo.

Recordemos que la idea del modelo presentado en el capítulo I es aplicar los conceptos elaborados en contextos que requieran de la integración de conocimientos y habilidades y no sólo la ejecución de operatoria por sí misma. Enfáticamente, se propone vincular la sistematización de algoritmos con la resolución de situaciones problema de distinta índole, buscando disminuir el predominio de la ejecución de cálculos de manera rutinaria. De tal modo que si se piensa en enseñar a sumar, debe incluirse en la reflexión “qué sumar” y “para qué sumar”.

En estos momentos, se requiere que se involucre en el diseño de actividades que lleven a los niños a efectuar sumas, como medio para resolver situaciones problema.

Le proponemos que diseñe al menos dos actividades, indicando los materiales que necesita, la modalidad de trabajo y las instrucciones que considere pertinentes. Ensáyelas con grupos de niños e incluya sus resultados en su texto paralelo. Si le es posible incluya fotografías de los niños trabajando.

Las dos siguientes actividades están orientadas hacia la experimentación de “prestar” para encontrar diferencias.

Actividad 6

Materiales: corcholatas azules, anaranjadas y rojas. Una anaranjada vale diez azules y una roja diez anaranjadas.
Modalidad de trabajo: pareja.
Procedimiento:

a. Depositar igual número de corcholatas azules y anaranjadas en una caja profunda, de manera que los niños no las vean.
b. Cada niño toma un puñado, las coloca en la casilla que corresponde y luego escribe el número.
c. Repiten la operación dos turnos, identificando al mayor de los números formados, encuentran la diferencia entre ellos.
d. Gana el que tenga la menor diferencia entre los números formados .

Por ejemplo, si un niño obtiene en sus dos turnos 23 y 41 respectivamente, él identificará que el mayor es 41. Las descomposiciones de los números le serán útiles para encontrar la diferencia entre ellos:

41 = 4 decenas + 1 unidad
y 23 = 2 decenas + 3 unidades

Establecer la diferencia en las unidades no es inmediato, pues el mayor tiene una y el menor tiene tres, es el momento propicio para determinar si los niños utilizan la experiencia anterior.

No debe olvidarse que se busca que el jugador cambie una tapa anaranjada por 10 azules y de esta manera reúna l1, con lo cual ya puede encontrar que la diferencia en unidades es de 8.
Será evidente que ya no tiene tres decenas pues cambió una, quedándole sólo dos, por lo cual la diferencia en las decenas es de 1. La respuesta buscada es una decena y 8 unidades, lo cual representa al l8.

Observaciones: es importante que se oriente a los niños para que escriban las cantidades con las que están operando. Deberá estar alerta ya que es muy usual que cuando se habla de encontrar la diferencia entre dos números, algunos niños no piensan en contar los objetos que sobran y quitarlos, sino más en bien en agregar los que faltan.
Puesto que el hecho anterior se basa en el uso de estrategias de conteo, en la experimentación con estas actividades se permitió que los niños manejaran sus propios conceptos y el trabajo se centró en llevarles a descubrir que hallar la diferencia entre dos números equivale a determinar en cuanto excede el mayor al menor y para esto, da lo mismo si averiguan cuánto le sobra al primero o cuánto le falta al segundo, al colocar los objetos en una correspondencia uno a uno.

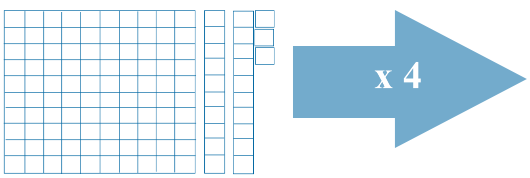
Enseñanza de la multiplicación

El uso de manipulativos ha mostrado que puede generar la comprensión de los algoritmos usados en la multiplicación y división y además proporcionan explicaciones significativas para acciones como la colocación de las cifras, cuando se ejecutan dichos algoritmos.

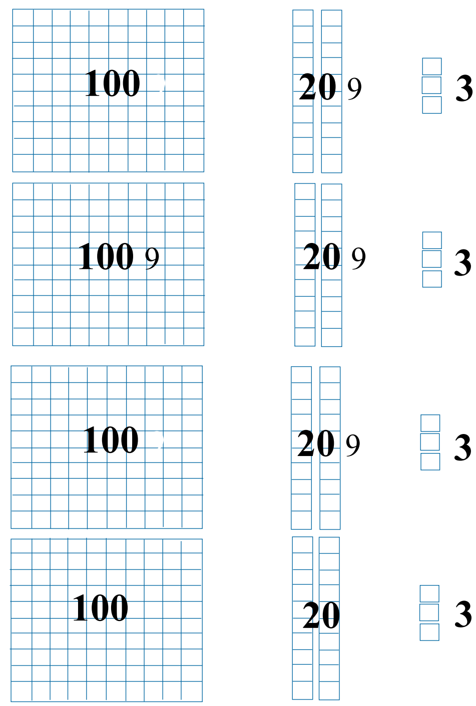
En los ejemplos y actividades siguientes, se utilizan las centenas cuadrículadas incluídas en el anexo para ilustrar algunos procedimientos que puede utilizar con sus alumnos.

Cuando se multiplica 123 x 4 tomando como base el concepto de multiplicación, previamente formado, con el enfoque de que ésta es una suma abreviada, los alumnos pueden, utilizando los manipulativos, interpretar gráficamente la operación de la siguiente manera:

123 x 4 equivale a determinar cuantas unidades en total se tienen al formar cuatro grupos de 123 unidades.

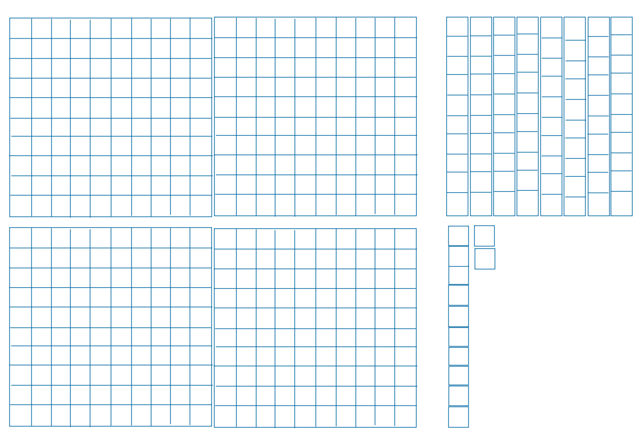


123



100 x 4 = 400   20 x 4 = 80   3 x 4 = 12

123 x 4 = 492



El manipulativo de piezas en base diez puede utilizarse para ilustrar el algoritmo de la multiplicación a lápiz y papel.

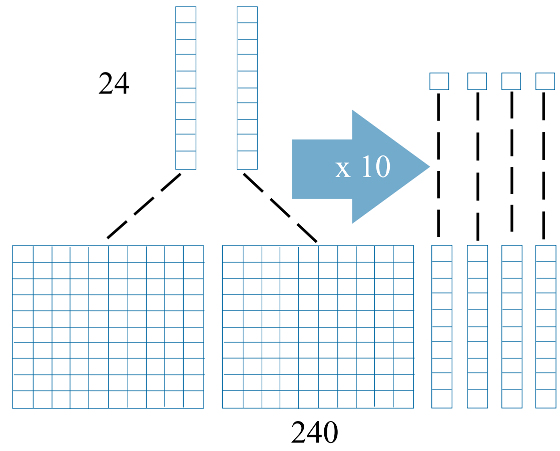
El primer producto parcial genera una decena y dos unidades se escribe 2 en la casilla de las unidades y la decena se agrega a las 8 que se obtienen del segundo producto parcial (20 x 4), por lo que resulta 9 decenas.
El tercer producto es inmediato: 4 grupos de 1 centena.

centenas	decenas	unidades
4	8	12
4	9	2

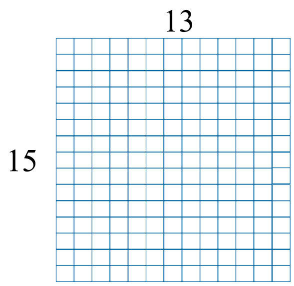
Ahora ilustramos cómo puede realizarse la multiplicación con los manipulativos de base 10.
1 decena por 10 produce 1 centena y una unidad por 10 produce decenas. Esto parece trivial aplicado en niños que se inician en el sistema decimal.

También ilustra el hecho de que al multiplicar cualquier número entero por 10, el producto se obtiene con sólo agregar un 0 al número a que se va a multiplicar.

centenas	decenas	unidades
x	2	4
	1	0
2	4	0

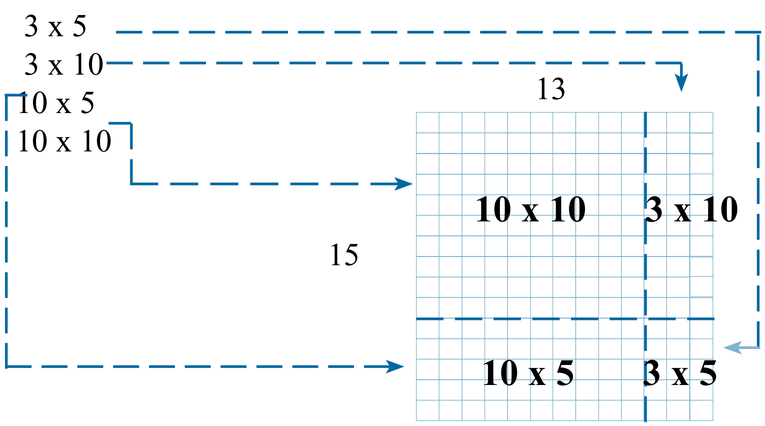


Calcular el producto de dos números por adición repetida se hace poco práctico, pues son muchos grupos los que se deben formar. Para productos que involucran a números de dos dígitos es mas conveniente utilizar arreglos rectangulares. Por ejemplo: para multiplicar 13 x 15, pueden dibujarse un restángulo que tenga 13 unidades horizontales y 15 verticales.



Ahora bien, como 13= 10 + 3 y 15= 10 + 5, 13x15 = (10 + 3) (10 + 5), lo cual simplifica la sustitución inicial y a que pueden encontrarse resultados parciales y sumarse para hallar la cantidad buscada.

El algoritmo para la multiplicación a lápiz y papel se puede obtener por medio de productos parciales. En el ejemplo anterior se calculan cuatro productos parciales.



Observación: utilizando como material barritas de cinco unidades y cuadrados de 5 barritas, homos experimentado con niños en edad preescolar y los primeros grados del nivel primario, actividades similares a las corcholatas, observando que los niños resuelvan las situaciones planteadas usando únicamente principios de conteo.

a. El producto puede efectuarse escribiendo en forma vertical

$$\begin{array}{r l}
13 & \\
\times\ 15 & \\
\hline
65 & (13 \times 5) \\
130 & \text{— — — —}\ (13 \times 10) \\
\hline
195 & \text{— — — —}
\end{array}$$

b. Usualmente para realizar esta operación se procede así:

$$\begin{array}{r l}
13 & \\
\times\ 15 & \\
\hline
65 & (5 \times 3) = 15\text{, se escribe 5 y se “lleva” 1; } (5 \times 1) = 5 \text{ más 1 que se “lleva” son 6.} \\
13 & (1 \times 3) = 3\text{, se escribe abajo del 6; y } 1 \times 1 = 1 \\
\hline
195 &
\end{array}$$

El corrimiento de la posición se debe a que el valor posicional del 1 del tercer producto parcial, es el de las decenas, es decir cero, lo anterior ha producido la costumbre de obviar el cero ya que no altera el resultado.

Ejemplo

Al multiplicar $125 \times 34 = 125\ (4 + 30)$

es equivalente a efectuar $125 \times 4 + 125 \times 30$

El procedimiento comúnmente utilizado es:

$$\begin{array}{r l}
125 & \\
\times\ 34 & \\
\hline
500 & \text{— — — — —}\ (125 \times 4) \\
3750 & \text{— — — — —}\ (125 \times 30) \\
\hline
4250 &
\end{array}$$

Note que no se multiplica por 3 sino por 3, decenas es decir, por 30.

Como fruto de la reflexión, con diversos grupos de maestros con quienes se han implementado estas actividades, se ha obtenido la recomendación de la conveniencia de recordar contínuamente a los niños que el valor de los números depende de la posición en que se encuentren, ya que esto permite explicar procedimientos como el mostrado.

Actividad 7

Materiales: manipulativos (anexo), tarjetas con los dígitos.
Modalidad de trabajo: parejas.
Procedimiento: cada alumno debe construir sus piezas, cortando centenas, decenas y unidades de acuerdo con el modelo propuesto y diez tarjetas con los dígitos.
a. Se forma un mazo con las cartas y se mezclan, luego se colocan con el número hacia abajo.
b. Cada miembro de la pareja toma dos tarjetas y forma con ellas un número de dos cifras, enseguida tomará una tercera tarjeta que indicará el número por el que se multiplicará el primero, si en la tercera tarjeta aparece el cero debe escoger otra. El otro participante multiplicará las cantidades propuestas utilizando los manipulativos.

Puede aprovecharse la actividad para profundizar en la conceptualización de la multiplicación como suma abreviada.

Dé indicaciones para que los niños registren sus resultados .

d. Se repite el proceso cambiando la primera selección a tres tarjetas. Luego efectuará productos de cantidades con dos dígitos.

Observación: no pierda de vista, que se espera que como producto del uso de los manipulativos surja la comprensión del algoritmo de la multiplicación, especialmente lo referente al “corrimiento” del tercer producto parcial.

Enseñanza de la división de números naturales

La división se utiliza para comparar dos cantidades; por ejemplo: en situaciones que involucran repartos, sirve para determinar la cantidad que corresponde a cada uno de los que participa en el reparto.
El estudio de esta operación generalmente se inicia asociada a la multiplicación.

Por ejemplo $15 \div 3 = 5$ ya que $3 \times 5 = 15$; $100 \div 25 = 4$ porque $25 \times 4 = 100$.

En este primer acercamiento, para dos números cualesquiera a y b, el resultado de efectuar $a \div b$, es un número k (si existe) tal que $a = b \times k$.

En los ejemplos anteriores no se enfrenta la posibilidad de que k no exista; es posteriormente cuando los niños enfrentan situaciones como: $15 \div 4$ y no encuentran un número que multiplicado por 4 sea igual a 15.

La definición de la división involucra conceptos como dividendo, divisor, cociente y residuo con los que los niños se van familiarizando con facilidad.
Las dificultades se presentan usualmente al estudiar el algoritmo para dividir cantidades que están por encima del rango de las centenas.

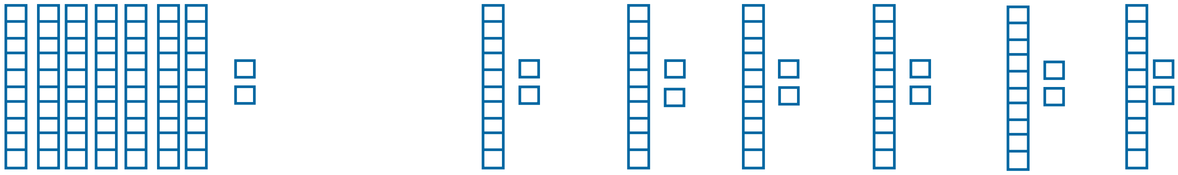
La estrategia que hemos ensayado se basa en la asociación de cada paso del procedimiento realizado, con operaciones ejecutadas directamente sobre objetos. De esta manera los niños pueden comprender paulatinamente las razones que sustentan el algoritmo.
Proponemos la utilización de las centenas y decenas cuadriculadas que se usaron en la multiplicación.

Los ejemplos desarrollados a continuación, pueden servir como guía para el maestro en las actividades que realizará con los niños.

Ejemplo

Calcular el cociente $72 \div 6$ utilizando los manipulativos de base diez.
Una posibilidad es repartir 72 en 5 grupos, de manera que el cociente será el número de elementos en cada grupo.

72 ÷ 6 = 12

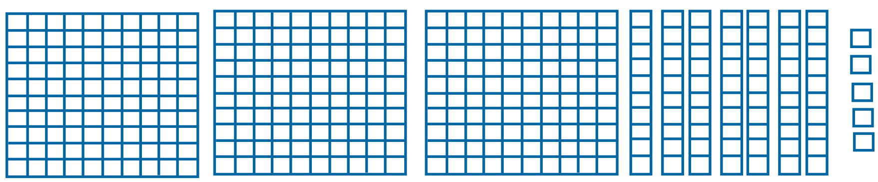


Para formar los grupos, los niños se verán obligados a “canjear” una fila de decena por unidades, este hecho reforzará el sistema decimal, y se aplicarán conocimientos previos para resolver situaciones nuevas.
El enfoque utilizado al resolver este ejemplo es el de repartición.
Otra posibilidad es formar grupos de 6 unidades y descubrir que se forman 12 grupos.

Ejemplo

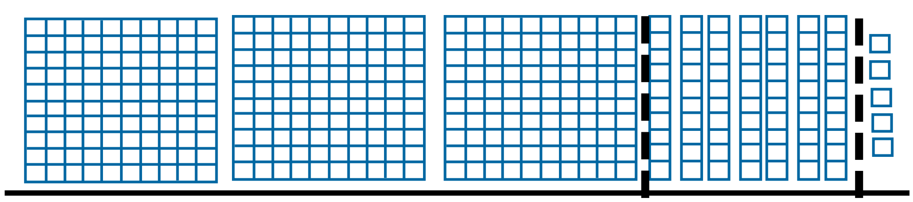
Se continuará dividiendo cantidades como 375 ÷ 3 y se desarrollará simultáneamente el procedimiento del algoritmo de división.

1.



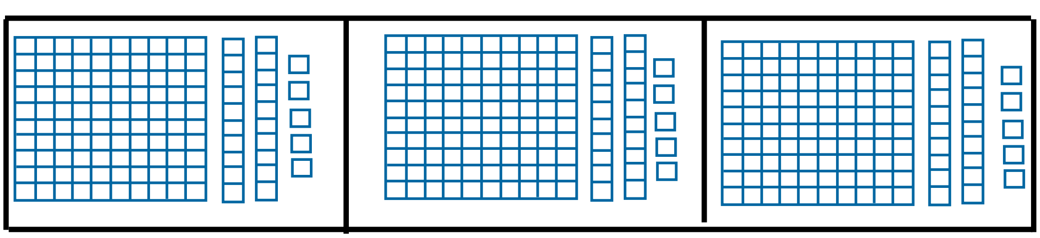
3 | 375

2. Se opera con las centenas y queda un resto de 7 decenas y 5 unidades.



1
3 | 375
-300
75

3. Se reparten las decenas y queda un resto de 1 decena y cinco unidades.



12
3 | 375
-300
75
-60
15

125
3 | 375
-300
75
-60
15
15
00

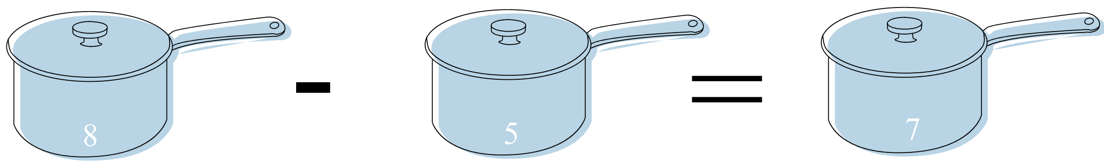
4. Con el manipulativo hará falta “canjear” la decena por unidades y en total quedan 15 unidades, que al ser divididas entre tres corresponden 5 a cada grupo formado.

5. En cada grupo quedan 125 unidades: 1 centena + 2 decenas + 5 unidades.

Sugerencias de Trabajo

Aprendiendo Matemática.

En un concurso programa llamado "Vea el fondo de la olla", para ganar un automóvil, los participantes deben encontrar los tres últimos dígitos de la placa, resolviendo el acertijo:



Uno de los concursantes descubre que en la figura se representa la expresión:

OLLA (8) - OLLA(5) = OLLA(7).

Aplicando sus conocimientos, acerca de los sistemas posicionales de numeración, descubre que O, L y A representan números y que 8, 5 y 7 son las bases en que están escritos. Transforma la expresión en: 44x O - 14 x L - A = 0 y determina que O = 1, A = 2 y L = 3. Con esta información determina que el número buscado es 513, ganando el automóvil.

Reconstruya el procedimiento empleado por el concursante, explicando cada uno de los pasos

Para ponerse a pensar.

Explique por qué en los sistemas no posicionales de numeración, no se requiere del uso del cero.

Para conocer cómo piensan los niños.

Reúna a un pequeño grupo de alumnos de 5º o 6º grados. Indague qué saben acerca de los sistemas posicionales de numeración. Recuérdeles como funciona el sistema decimal.

Realice preguntas como: ¿Cuántas decenas hay en 214?

Pídales que formen un número con 12 decenas y 11 unidades.

¿Qué cantidad es mayor: 2 centenas 5 decenas y 25 unidades o 1 centena, 22 decenas y 8 unidades?

Esta actividad usualmente requiere esfuerzo de los niños, anímeles hasta cuando logren lo propuesto.

Actividades didácticas.

Le proponemos que diseñe sus propias actividades para la enseñanza del sistemas de posicionales de numeración y las operaciones de suma y resta, multiplicación y división. Incluya los materiales, la modalidad de trabajo e instrucciones que considere convenientes.

Realícelas con pequeños grupos de alumnos y registre sus experiencias en su texto paralelo. De ser posible, incluya fotografía de los niños trabajando.

Lecturas complementarias.

Investigue las formas y sistemas de numeración que usaban los Mayas, los Aztecas y los Incas. Establezca diferencias y similitudes entre ellos y de cada uno con el sistema decimal.

CAPÍTULO IV

FRACCIONES

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, tanto la enseñanza como el aprendizaje de las fracciones constituyen uno de los grandes retos de la educación matemática.

Estudios realizados por varios investigadores reportan distintas interpretaciones que se dan a los números fraccionarios, tales como: partes iguales de un todo, razón, cociente y operador, entre ellas. Esta gama de interpretaciones requiere de la realización de diversas actividades que permitan su mejor comprensión.

Debido a la amplitud del tema, en este capítulo sólo abordaremos algunas de las interpretaciones citadas, con la intención de que las actividades propuestas sirvan de guía para que los maestros puedan diseñar otras.

Nuestra propuesta se centra en la elaboración de conceptos, construcción de significados y desarrollo de habilidades, antes de la ejecución de operaciones.
Los actividades y juegos presentados se apoyan en representaciones gráficas y manipulación de objetos, en busca de que tanto docentes como alumnos experimenten nuevas formas de estudiar el tema.

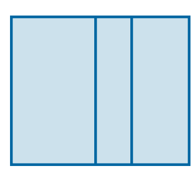
ACTIVIDADES PARA LOS DOCENTES

INTERPRETACIONES DE LAS FRACCIONES

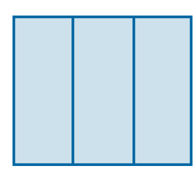
Partes congruentes tomadas de un todo

Una de la ideas básicas acerca de las fracciones, es la división de un todo en partes. La noción de fraccionar un todo aparece en la vida cotidiana en expresiones como la siguiente: “Compre su casa con un enganche fraccionado”. Usualmente, lo anterior significa que el primer pago puede darse en varias cuotas iguales.

Posiblemente por considerarse obvio, generalmente se omite aclarar que no todos los resultados de dividir un todo en partes se consideran una fracción, que esto se restringe al caso en que las partes en que se divide sean de igual tamaño.



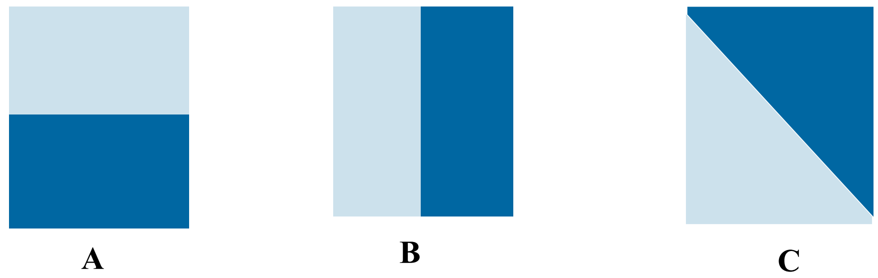
A



B

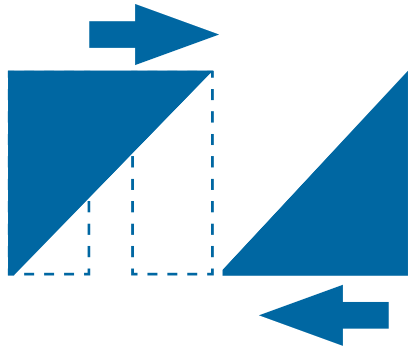
Por ejemplo: aunque ambas figuras están divididas en tres partes, sólo en B se considera dividida en tercios.

Otra de las omisiones comunes, es que las partes fraccionarias de un mismo todo no siempre tienen la misma forma. Veamos las siguientes figuras:



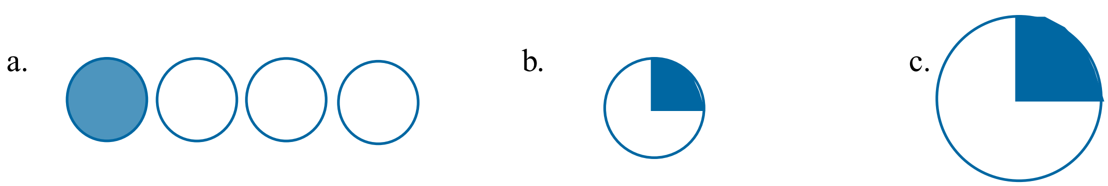
a. Se sugiere que se recortar tres cuadrados de 5 cm. de lado, hacer los tres cortes mostrados y verificar que es el mismo todo dividido en partes iguales pero de distinta forma.

b. Otra sugerencia es que realice los cortes en papel y transforme una forma a otra.

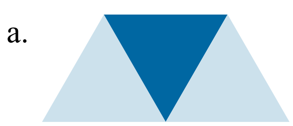


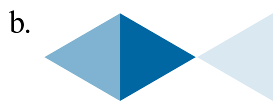
Un aspecto importante de enfatizar, es que esta conceptualización de la fracción, conduce a que el mismo número represente la misma relación entre diferentes unidades y sus partes.

Por ejemplo: con 1/4 se representa la parte sombreada en :



Asimismo, se debe explorar mucho más el hecho de que una figura puede ser la misma fracción de un "todo" con diferente forma, se evidencia en el siguiente ejemplo de representación de un tercio:

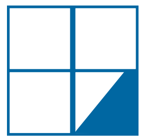


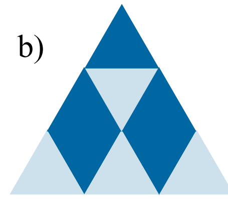


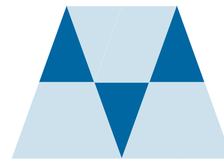
A continuación presentamos algunas actividades, las cuales sugerimos que realice en su texto paralelo.

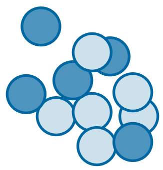
Actividad 1

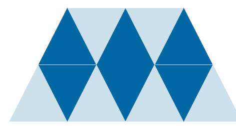
Indique la fracción sombreada en azul de cada gráfica.

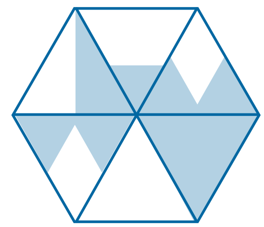
a) 

b) 

c) 

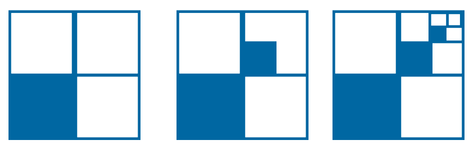
d) e) 

f) 



Actividad 2

a. Indique la fracción representada en cada figura.



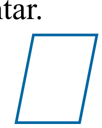
b. Represente las tres fracciones del inciso anterior en la misma gráfica

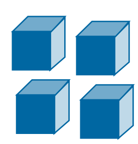
c. ¿Qué fracción está representada? y ¿a qué operación corresponde?

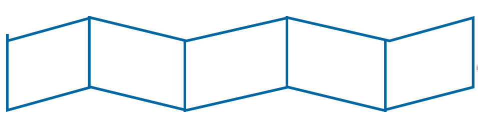
d. Represente 1/2 y 1/3 en la misma gráfica; obsérvela
y determine a cuánto equivale la suma de las fracciones.

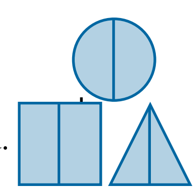
Actividad 3

Dada la figura y la fracción que representa, graficar de 3 formas diferentes el todo al que puede representar.

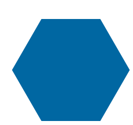
a.  1/4

b.  2/5

d.  4/3

d.  2/3

e.  3/9

f.  6/5

En la realización de las actividades anteriores, se interpretó el concepto de fracción como el número de partes iguales tomadas de un todo. El trabajo con la representación gráfica afirma este concepto y fundamenta la idea de fracciones equivalentes, conduciendo directamente a la suma de fracciones.

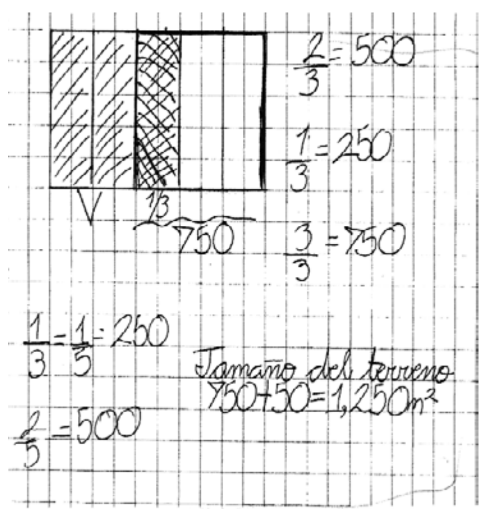
Adicionalmente, los conceptos desarrollados y las estrategias utilizadas para ello, permiten resolver algunas situaciones problema.

Actividad 4

A un grupo de estudiantes de cuarto primaria se les propuso la siguiente situación problema.

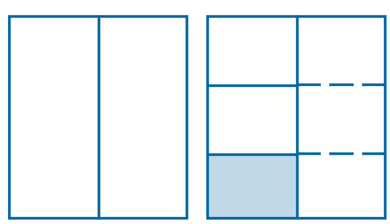
Una familia hereda un terreno del cual vende dos quintas partes y posteriormente vende un tercio del resto. Si todavía le quedan 500 m^2 ¿ cuál era la extensión inicial del terreno heredado?

a. Analice las soluciones encontradas por dos alumnas para el problema propuesto.
b. Establezca si las soluciones son correctas.
c. ¿Qué conclusiones puede extraer acerca del razonamiento de las alumnas.
d. Si detectó algún error de razonamiento u operatoria, corregirlo y proponer qué estrategia puede utilizarse para que los alumnos no cometan ese error en el futuro.



Fracción como operador

Otra interpretación de las fracciones es la de operador. Grafiquemos 1/3 de 1/2.
Se detecta que se busca representar un tercio de la mitad, para lo cual precedemos de la siguiente manera:



Dividimos el todo en medios

Dividimos un medio en tres y sombreamos uno

Vemos que la unidad quedo dividida en sextos. La parte que sombreamos equivale a 1/6 del toda la figura.
Hemos descubierto que 1/3 de 1/2 es un 1/6.
¿Qué relación existe en los numeradores de las fracciones dadas y el de la que encontramos?
¿Cómo se relacionan los denominadores?

Fracción como razón.

Esta interpretación de la fracción es de gran aplicación en distintos contextos, la cual surge de la comparación de dos números por medio de un cociente.

Por ejemplo si el equipo A ganó 4 de los 9 juegos en los que participó, mientras que el equipo B ganó
5 de los 11 que jugó. ¿ qué equipo tuvo mejor rendimiento?

Para el equipo A la razón entre juegos ganados y juegos jugados es de 4/9 y para B es de 5/11.

Como 4/9 > 5/11, puede decirse que el equipo A tuvo mejor rendimiento en la temporada.

Actividad 5

En un libro de texto de una conocida casa editora se presenta el siguiente problema para los niños de 5º primaria. Le proponemos que lo resuelva, lo analice y opine acerca de su adecuación para este grado.

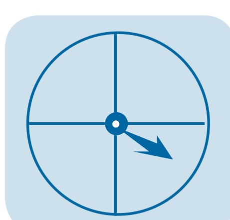
"Los Icebergs son grandes trozos de hielo que se separan de los mantos de hielo y flotan en el mar. Constituyen un enorme peligro para los barcos porque la parte visible por encima de la superficie del agua, corresponde a 3/25 de su volumen.

Suponiendo que un iceberg tiene un volumen de 21000,000 (veintiun millones) de metros cúbicos, cuál será su volumen visible? Si se estima que la edad media de un iceberg es de 5,000 años, ¿qué fracción de ese tiempo es el presente siglo?".

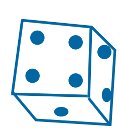
La interpretación de fracción, como razón, también es utilizada cuando se estudian temas como probabilidad y proporcionalidad los cuales ejemplificamos a continuación.

Ejemplos

Se entenderá por "experimento aleatorio" , una situación que puede ocurrir de varias maneras. Los resultados de un experimento son las maneras en que puede suceder.



girar ruleta



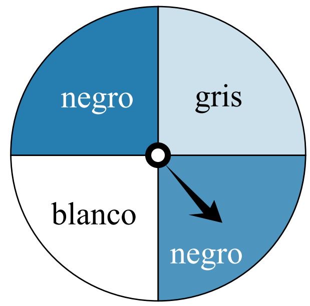
lanzar dado

La probabilidad de que un suceso ocurra puede calcularse por medio de la razón :

$$\text{Probabilidad} = \frac{\#\ \text{resultados favorables}}{\#\ \text{total de resultados posibles}}$$

Suponga que juega con una ruleta como la que se muestra en la figura

a. ¿Cuál es la probabilidad de que al detenerse después de girar la ruleta, la flecha señale el sector azul?



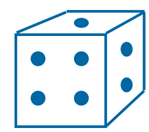
Suceso o evento: que la flecha señale el sector azul.

\# de resultados posibles = 4 (negro, azul, gris, blanco),
\# de resultados favorables = 1

Probabilidad de que se detenga en azul = 1/4

b. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado, en la cara superior quede un múltiplo de 3?

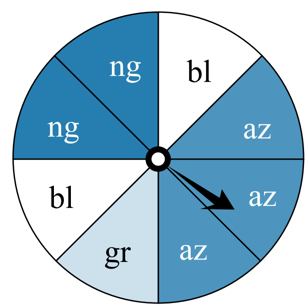
Suceso: que en el lanzamiento del dado caiga un múltiplo de 3.



\# total deresultados posibles = 6 (puede salir 1,2,3,4,5,6).
\# de resultados favorables = 2 (sale 3 o 6).

Probabilidad de que salga un múltiplo de 3 = 2/6.

Actividad 6



Con la ruleta mostrada, calcular :

a. ¿ Cuál es la probabilidad de que la flecha se detenga en blanco?
b. ¿ Es más o menos probable que la flecha caiga en gris que en negro?
c. ¿ Cuál es la probabilidad de que la flecha se detenga en azul o blanco?
d. ¿Cuál es la probabilidad de que la flecha se detenga en un color diferente de gris?

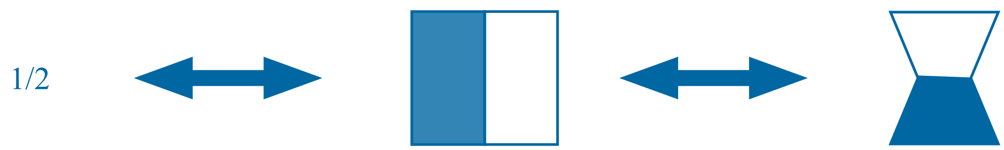
ACTIVIDADES PARA REALIZAR CON LOS ALUMNOS

Antes de presentar actividades, sugerimos la secuencia que se deriva de lo que hemos ensayado en la enseñanza del tema.

Iniciar la interpretación de fracción como partes iguales tomadas de un todo. Los niños deben familiarizarse con el significado del vocabulario que se usa. Por ejemplo, un medio significa la mitad. Puesto que aún está aprendiendo la caligrafía de los números, no es conveniente trabajar desde el inicio con el número 1/2 .

Es oportuno proponer actividades en donde para hallar un medio de algo, tenga que dividirlo en dos partes iguales y tomar una de ellas; puede referirse a situaciones concretas de partir algo, como naranjas, papeles; o cortar, dibujar, pintar, identificar, etc. Si se da a los niños una cantidad de objetos y se les pide que separen la mitad o la tercera parte, esto inducirá el desarrollo de estrategias de conteo y clasificación.

Luego iniciar con una reactivación de lo aprendido anteriormente, enfatizando las razones de los nombres que reciben las partes de una fracción. En esta etapa se puede empezar a usar la forma de escritura 1/2 , 1/4, etc. asociándola con la representación gráfica de la fracción que representa. Se busca establecer la relación número-gráfica y luego la relación gráfica- gráfica, esto se ilustra a continuación.



En la etapa siguiente se propone el estudio de las fracciones equivalentes, tomando como base el concepto de la fracción como partes iguales de un todo y apoyándose en la representación gráfica estudiada anteriormente.

También se considera oportuno iniciar el estudio de adición y sustracción de fracciones de igual denominador.

Para ello debe partirse de la representación gráfica de cada una de las fracciones involucradas y de la facilidad que aporta el hecho de que las partes que se adicionan son del mismo tamaño.

La idea es que al final de muchas actividades, los niños descubran la famosa expresión: " para sumar (restar) fracciones de igual denominador se suman (restan) los numeradores y se conserva el mismo denominador".
Puede usar actividades similares a la número 2 de las que se proponen para el docente.

Posteriormente se propone ampliar el estudio a las fracciones impropias y a su representación como número mixto. Además, puede estudiarse la suma y resta de fracciones de diferente denominador con la base visual de la representación gráfica y utilización de material concreto, a partir de los cuales se evidencie la necesidad de que las partes sean del mismo tamaño; entonces el concepto de fracciones equivalentes será una herramienta poderosa.

Nuevamente, enfatizamos que sólo hasta el final del estudio del tema, se buscará que los niños elaboren un algoritmo para sumar o restar fracciones cuyos numeradores sean diferentes.

Para entonces, se está ya en posibilidad de estudiar la multiplicación de fracciones, a través de conceptualizarlas como operadores y con una fuerte componente gráfica asociada. Insistimos, los niños deben descubrir el algoritmo para multiplicar fracciones, después de realizar diversas actividades y darle reglas para operar, cuyo fundamento desconoce. La actividad 4 de las que realizó, le sirve como modelo.

Finalmente, se pretende integrar los conocimientos anteriores y ampliarlos a la realización de divisiones y operaciones combinadas, a la vez que iniciar el estudio de las propiedades de las operaciones, preparando a los alumnos para el nivel secundario. Se considera que es el momento oportuno para estudiar la representación decimal de las fracciones y su ubicación en la recta real.

Es conveniente recordar, que además de la parte conceptual, es muy importante mostrar a los niños para qué sirven los conocimientos que adquiere. Así que una gran parte del trabajo que debe realizarse, estará orientado hacia la resolución de situaciones problema que involucren el uso de fracciones.

Dejamos el espacio abierto para que incorpore todas las sugerencias que considere que pueden enriquecer la presente propuesta.

Actividad 1

Juego de unidades fraccionadas.

Antes de iniciar el juego, cerciórese de que cuenta con las piezas requeridas y que todas las partes están debidamente identificadas con el número correspondiente.

El objetivo principal es que a través del uso de material concreto, los alumnos se familiaricen con la relación entre el número y la parte que representa y reafirmen los aspectos conceptuales.

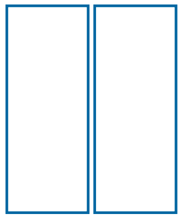
Materiales
Se requiere contar con cartulina, fommy, etc. de cuatro colores diferentes. Cortar:

- 10 cuadrados de cada color de una pulgada por lado.
- Un círculo de cada color de 3 pulgadas de diámetro y dividir uno en medios, otro en tercios, otro en cuartos y otro en sextos.
- Un círculo de cada color de 6 cm. de diámetro y dividir uno en medios, otro en tercios, otro en cuartos y otro en sextos.
- Un rectángulo de cada color de 12 cm por 6 cm y cortar uno en medios, otro en tercios, otro en cuartos y otro en sextos. Haga los cortes paralelos al lado de 6 cm.
- Un rectángulo de cada color de 3 pgd. por 2 pgd. y cortar uno en medios, otro en tercios, otro en cuartos y otro en sextos. Haga los cortes paralelos al lado de 2 pgd.
- Un hexágono regular de cada color de 1.5 pgd. de lado y cortar uno en medios, otro en tercios, otro en cuatros y otro en sextos. Haga los cortes a partir del centro.

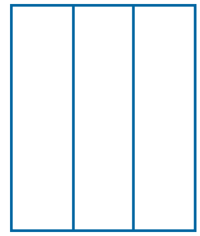
Actividad 2

Usando como base las siguientes figuras, represente las fracciones indicadas.

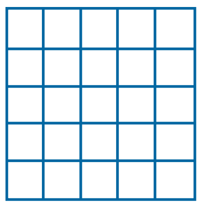
a) 5/6.



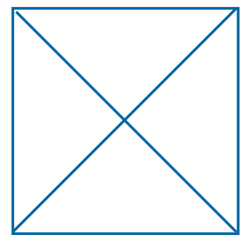
b) 4/15



c) 7/10



c) 5/12



Actividad 3

Modalidad de trabajo: en parejas.

a) Se trabaja inicialmente con los círculos y rectángulos fragmentados en mitades y cuartos. El material fue diseñado en dos tamaños y formas diferentes para que el niño observe que el tamaño y la forma de los medios y los cuartos puede variar, pero que mantienen la misma relación con respecto al todo al que pertenecen.

Uno de los integrantes escoge una parte de una de las figuras y el otro debe colocar otra parte igual. Las parejas cambian de papel hasta completar la figura.

Deben plantearse a los niños preguntas como: ¿cuántos medios se necesitan para formar una unidad? ¿cuántos cuartos se necesitan para formar una unidad? etc.

Variante:
Efectuar un trabajo similar al realizado con los medios y los cuartos, con tercios y sextos.

Después de la etapa de identificación, se puede empezar a comparar las fracciones de una misma unidad para establecer cual es mayor o menor.

Por ejemplo: cada jugador esconde sus piezas y establecen turno para poner condiciones.

El jugador uno puede decir: parte de un círculo, gana la menor. Ambos muestran una pieza y comparan cuál es menor en relación con el todo de donde fue tomada.
Supongamos que uno muestra un tercio y otro un cuarto, aunque hallan sido tomadas de círculos de distinto tamaño, 1/4 es menor que 1/3 con relación al todo de donde se tomó, por lo tanto, gana el que sacó un 1/4.

Observe que si la regla hubiese sido gana el mayor, entonces gana el jugador que sacó un tercio.

Si hay empate, lo jugadores deciden que hacer.

Es importante hacer notar a los alumnos que tienen piezas, que son cuartos de círculos de tamaños diferentes, a pesar de la diferencia de tamaños , ambos representan la misma relación respecto a la unidad de la que fueron tomados.

Actividad 4

Fracciones equivalentes
Puede trabajarse con todas las figuras o con algunas de ellas, dependiendo del grado en que se trabaje.

a. De manera similar al juego anterior, cada jugador esconde sus figuras y presenta una parte por turno, el otro jugador deberá darle fracciones que sean equivalentes a la que se le presenta.

Luego intercambian funciones y pierde el que no pueda colocar las partes equivalentes durante tres veces.

Es importante responder preguntas como: ¿Cuántos sextos hay en un tercio?, ¿cuántos sextos hay en dos tercios?, etc.

b. Cubrir los hexágonos con trapecios, triángulos y rombos, determinar la fracción que constituye cada figura .

c. Con los cuadrados de colores, cada jugador por turno formará arreglos, por ejemplo: coloca 6 rojos y 6 amarillos y pregunta: ¿qué fracción de los cuadrados son rojos? El otro responde y luego intercambian los papeles.

Algunos ejemplos más complicados pueden ser: colocar 3 azules, 3 rojos, 3 verdes, 3 amarillos y preguntar: ¿Qué fracción de los cuadrados no son rojos ni amarillos , o bien, ¿qué fracción de los cuadrados son verdes o rojos?

Estas preguntas pretenden establecer un vínculo con los conocimientos adquiridos anteriormente.

d. Construyendo figuras: con el objetivo de promover el desarrollo de la creatividad y del pensamiento espacial, se propone a cada jugador que utilice la mayor cantidad de piezas de su juego para formar diversas figuras e integrarlas como un todo.

Actividad 5

Juegos con monedas y dados.

Materiales: dados, monedas
Modalidad de trabajo: parejas

a. Para reforzar el aprendizaje de la suma de fracciones de igual denominador, realice la siguiente actividad: Cada jugador lanza por turno una moneda y se suma 1/16 por cada cara y 2/16 por cada escudo. Gana quien llegue primero a l6/16.

b Para la resta se juega en forma similar: se empieza con l6/l6 hasta llegar a cero. Si algún jugador obtiene una fracción muy grande y no es posible restar, pierde un turno.

c Cada jugador lanza por turno dos dados y con los resultados forma una fracción. Gana el que forme la mayor (o menor)

d. Se lanzan dos dados dos veces y con ellos se forman dos fracciones, se anotan las fracciones obtenidas y se van sumando en cada tiro.

Gana el jugador que tenga mayor (o menor) suma en tres tiros.

Actividad 6

Juegos de Dominó.

a) Relación gráfica-gráfica.

Materiales: juego de dominó de 36 piezas en las que aparecen graficadas distintas fracciones en figuras diversas. En los primeros años, pueden identificarse medios con medios, tercios con tercios, etc. A partir de tercero, debe promoverse que se identifique medios con cuartos, etc. (Se incluye en anexo).

Modalidad de trabajo: pareja.

Procedimiento. Repartir a cada jugador 5 piezas y colocar una al centro, cada uno por turno deberá colocar en uno de los extremos, alguna que represente la misma fracción.
Cuando un jugador no tiene alguna gráfica que pueda asociar con la de la mesa, debe tomar una del mazo y colocarla si es posible, si no, debe quedarse con ella.

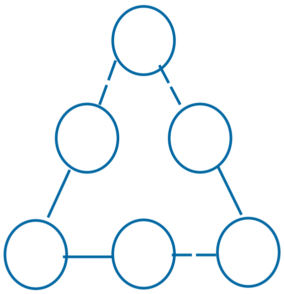
Gana el que primero se descarte o tenga menos al final.

b) Relación número-gráfica:
Este juego pretende profundizar en los conocimientos anteriores, promoviendo la asociación de gráficas con la fracción que representan.

Materiales:
juego de domino de 36 piezas. (se incluye modelo en anexo)
Procedimiento:
se juega de manera similar al anterior, con la única salvedad, que la asociación que vale es de gráfica-número o viceversa.

Actividad 7

Modalidad de trabajo: individual.
Procedimiento: Indique a los niños que coloquen los números 1/3, 1/4, 1/6, 1/12, 5/12 y 7/12 en las casillas, de tal manera que cada lado del triángulo sume 1.

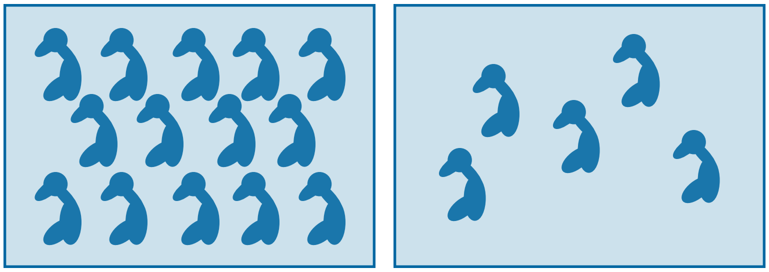


Antes de que inicien la búsqueda, indíqueles que si no logran colocar los números adecuadamente, no los borren, sino que construyan otro triángulo.
Aclaréles que llevar el registro de los intentos anteriores, permite ir descartando posibilidades.
Anime a los niños para que encuentren la solución; les llevará un poco de tiempo pero si son perseverantes , finalmente lograrán ubicar los números.

Actividad 8

Modalidad de trabajo: individual
Procedimiento: muestre a los niños las figuras A y B , indicando que en A se agrupan los alumnos de una clase y en B los que practican natación.

a. Los alumnos deben escribir la fracción que represente la razón entre los cuadros B y A.
b. Pida que generen otras fracciones utilizando características que se presenten en el grupo de alumnos de su sección.
c. ¿Cuál es la fracción que representa el número de alumnos de su sección respecto de todos los alumnos de la escuela?



A B

Actividad 9

En esta actividad se promueve el desarrollo del cálculo mental.
Materiales: juegos de 20 tarjetas, cada una de las cuales tiene anotadas fracciones en ambas caras, de manera que su suma sea uno.

Por ejemplo:

$$\boxed{\frac{3}{5}} + \boxed{\frac{2}{5}} = 1$$

Es recomendable diferenciar los lados de las tarjetas por color , o por el color de la tinta usado para escribir los números; en una cara se escribe con azul y en la otra con negro u otro color.

Modalidad de trabajo: grupos de tres personas.
Procedimiento:

a. Cada grupo mezcla su juego de tarjetas y las coloca en mazo con el mismo color hacia arriba.

b. Cada jugador, por turno, toma una tarjeta y dice la fracción con la que completa la unidad. Si acierta, se queda con la tarjeta, en caso contrario la coloca hasta abajo del mazo.

c. El juego termina cuando se agotan las tarjetas y gana el que acumule más tarjetas.

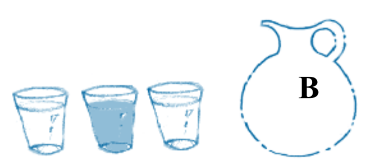
En la siguiente ronda pueden jugar con el otro color.

Actividad 10

Presente a los alumnos la siguiente situación problema y que lo escriban en su cuaderno junto con el dibujo.

En la jarra A, dos de los cinco vasos son de jugo de naranja (sombreados en gris).
En la jarra B, uno de tres vasos son de jugo de naranja (sombreado en gris).

A



B

¿En cuál jarra (A o B) cree usted que el agua tiene más sabor a naranja? ¿ Por qué?

Escriban, en sus propias palabras, el razonamiento que usaron para responder.

Después de resolver la situación inicial, se les pide que modifiquen las cantidades del problema y que los intercambien para resolverlos.

Al final, organizar una discusión breve de los procedimientos que utilizaron.

SUGERENCIAS DE TRABAJO

Aprendiendo Matemática.

Resuelva la siguiente situación problema.

Al pachón de Mariela le cabe un litro de líquido y contiene agua hasta los 3/4 de su capacidad, si se toma la mitad de agua que tiene: ¿ cuánto le quedó de agua?

Para ponerse a pensar:

Un cuadrado mágico es un arreglo de números en el cual, los números que están en las filas, columnas y en diagonal, suman lo mismo; esta suma se conoce como suma mágica. Si la suma mágica es 1 7/8 completar el cuadrado mágico.

	3/8	
	5/8	
1/4		

Para conocer como piensan los niños:

Proponga el siguiente problema a algunos niños. Registre sus observaciones y comentarios acerca de la forma en que lo resuelven. No olvide incluir la edad y el grado en que estudian los participantes.

¿Qué hora es cuando el reloj señala los 2/3 de 1/2 del doble de las seis de la mañana?

Actividades Didácticas

Solicite a algunos niños que consigan fotos o figuras en el periódico, revistas, etc. Pídales que observen la figura y planteen y resuelvan un problema que involucre fracciones.
Recoja las hojas donde trabajaron los niños y péguelas en su texto paralelo. Analice el trabajo realizado y coméntelo.

Lecturas complementarias.

Para complementar el estudio del tema, le sugerimos que consulte la obra: Fracciones, la relación parte todo, de los autores Llinares y Sánchez.

CAPÍTULO V

ELEMENTOS DE GEOMETRÍA

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, hay muchas propuestas que buscan incorporar temas de geometría en los programas escolares. En apoyo a esta tendencia, una buena cantidad de las actividades presentadas en esta obra, incluyen una fuerte componente geométrica; pero además, nuestro trabajo se ha orientado a transformar la enseñanza de los temas que se desarrollan usualmente en el nivel primario.

Las actividades que proponemos en este capítulo, se seleccionaron con el objetivo de mostrar algunas formas de trabajar en construcciones geométricas elementales, cuya utilización permita significar el concepto de perímetro como la medida de la longitud del contorno, borde u orilla de una figura; asimismo, buscamos que se descubra que el área es la medida de su superficie. Seguidamente, se busca que se descubra la relación entre estas medidas y finalmente, la deducción de expresiones conocidas que permiten realizar cálculos fácilmente.

Nuestro trabajo durante varios años formando docentes, nos ha permitido detectar que la geometría es el área que menos se enseña, en consecuencia, muchas de las actividades propuestas para realizar con los niños, han sido un material novedoso para los estudiantes de magisterio. Por tal motivo, les sugerimos que las realicen previo al trabajo en el aula, como parte complementaria de su formación.

Consideramos que uno de los soportes más fuertes de la enseñanza de la geometría en la escuela primaria, debe ser su presencia manifiesta en muchos y diversos aspectos de cualquier contexto. Estamos rodeados de formas geométricas, sólo tenemos que aprender a descubrirlas; para confirmar esto, basta observar nuestro cuerpo, el aula, la escuela, la casa, la naturaleza.

Además del valor instrumental de los conocimientos geométricos, el aprendizaje de la geometrìa es de alto poder formativo de destrezas de pensamiento, percepciòn espacial e intitución.

La vinculación de temas geométricos con otros de tipo artitmético y posteriormente algebraicos, permite a los alumnos establecer relaciones conceptuales entre distintas áreas de la matemática, que tradicionalmente se estudian por separado.

Consideramos que en el nivel primario, los niños deben familiarizarse con conceptos elementales como línea, polígono, adquirir destrezas en la constitución y trazo de figuras a partir de la observación y seguimiento de instrucciones.

En el capítulo 2 se presentaron varios ejemplos de construcción de razonamiento inductivos y deductivos en contextos geométricos.

ACTIVIDADES PARA EL DOCENTE

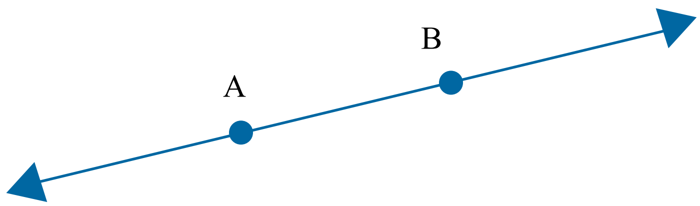
Inicialmente queremos recordar que el edificio de la geometría, al igual que el de otras áreas de la matemática, tiene sus cimientos en entes no definidos formalmente. En este caso, uno de tales objetos es la noción de punto. Si como ejercicio se intenta definir qué es un punto, se da el caso de que mentalmente se tiene muy claro, pero al tratar de definirlo, se cae en redundancias. Por esto se acepta como verdadera la idea intuitiva que de él se tiene.

Tomando como base la idea anterior, se construyen otros objetos como las rectas, pensando en una sucesión de puntos siguiendo la misma dirección. Con las rectas se forman figuras y con las figuras, cuerpos. La construcción de figuras y cuerpos, genera la necesidad de calcular las medidas de su contorno, superficie y la porción de espacio que ocupan, es decir, de perímetros, áreas y volúmenes

La geometría que estudiaremos fue formalizada por Euclides (300 a.c.) y tiene una construcción basada en un sistema lógico, de carácter hipotético deductivo. Empecemos recordando algunas nociones básicas.

Segmento de recta

Se considera como la unión de dos puntos fijos A y B de una recta, con la sucesión de puntos que están entre ellos.

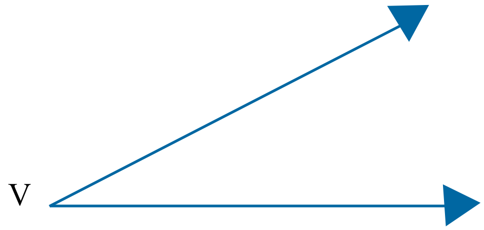


Rayo

Si A y B son dos puntos de una recta, el rayo AB consta del punto A y de todos los puntos de la recta que está del mismo lado que A.

Angulo

Se genera cuando un rayo rota alrededor de otro considerado fijo. Los rayos comparten un punto en común, el cual se denomina vértice del ángulo.



El sistema más usado para medir ángulos es el llamado sexagesimal, que consiste en dividir un giro de una vuelta completa en 360 partes iguales, a cada una de las cuales se le llama grado.

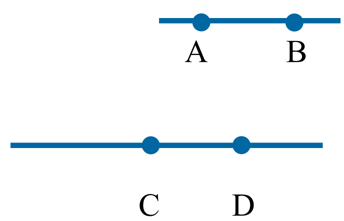
Aplicando estos conceptos y con la ayuda de instrumentos tales como: regla, compás y transportador, le proponemos que realice en su texto paralelo las actividades siguientes.

Actividad 1

Construcción de un segmento de recta que mida lo mismo que un segmento de recta dado AB.

Materiales: compás.
Modalidad de trabajo: individual.
Procedimiento:

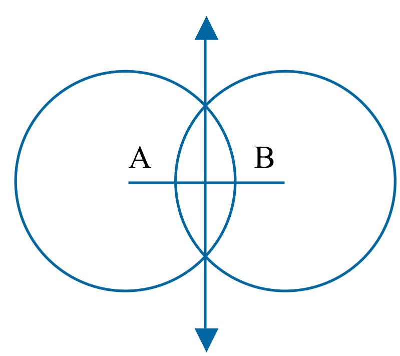
a. Dado el segmento AB



b. Coloque las puntas del compás sobre AB, sin cambiar la abertura apoye un extremo en C y marque un punto sobre la recta, llámele D.

c. Describir la relación que existe entre la magnitud de AB y la de CD.

Actividad 2



Ubicación del punto medio de un segmento de recta dado
Materiales: regla y compás.
Modalidad de trabajo: individual.
Procedimiento:

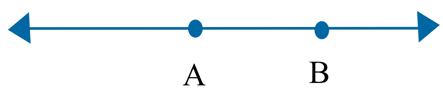
a. Trazar el segmento dado AB
b. Elegir cualquier abertura conveniente del compás, de manera que la distancia entre las puntas de éste, sea mayor que la mitad de la longitud de AB.
c. Trazar dos círculos con esa medida como radio, uno con centro en A el otro centro en B.
d. Ubicar e identificar los puntos de intersección de los círculos trazadas.
e. Trazar una recta que pase por esos puntos y ubicar el punto de intersección con el segmento AB.
f. ¿Qué puede decir de la distancia de ese punto al punto A y al punto B?

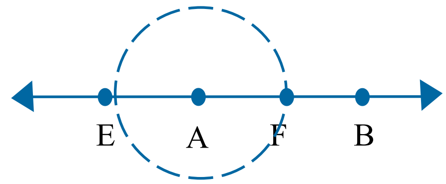
Actividad 3

Para realizar esta actividad debe tener presente que una recta perpendicular a otra, es aquella que la interseca formando un ángulo recto. (90^{o})

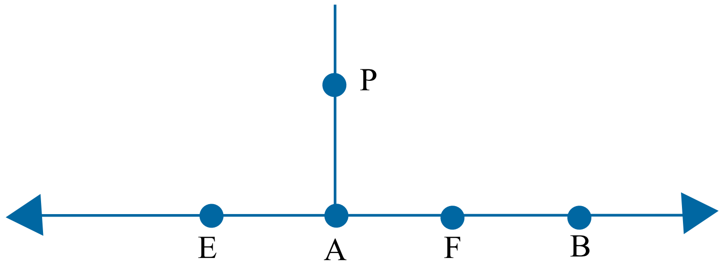
Materiales: regla y compás.
Modalidad de trabajo: individual.
Procedimiento:

a. Dado un segmento de recta AB, elegir cualquier abertura del compás menor que la distancia de A a B y fijando como centro A, trazar un círculo. Marque los puntos de intersección con AB.





b. Abrir el compás con una abertura que coincida con la distancia del punto E al punto F. Ubíquese en E y trace un arco a la altura de A. Hago lo mismo con el punto F. Ubicar el punto de intersección.

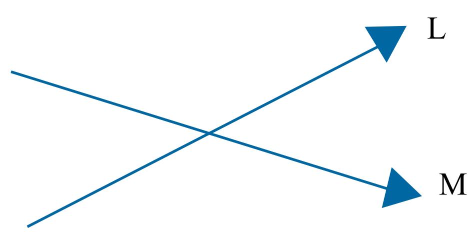


c. Trazar una línea del punto de intersección al punto A. Describa cómo es esta línea con respecto al segmento original.

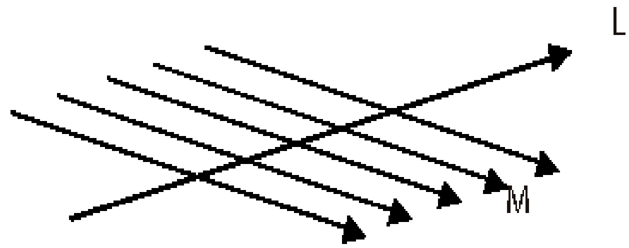
Actividad 4

Materiales: Regla y compás.
Modalidad de trabajo: individual.
Procedimiento:

a. Usando el procedimiento anterior, trace una línea perpendicular a un segmento dado AB.
b. Sobre el mismo segmento AB, trace otras perpendiculares.
c. ¿Qué puede decir de esa familia de rectas perpenticulares?
d. Trace una línea cualquiera que intersecte a la recta L, por ejemplo la recta M



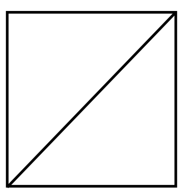
e. Trace otras rectas que lleven la misma dirección de M y que intersecten a L.
a. La familia de rectas que trazó, recibe un nombre especial ¿Recuerda cómo se llaman?



Actividad 5

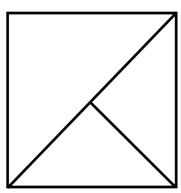
Materiales:regla, papel, tijeras.
Modalidad de trabajo: individual.
Procedimiento:

a



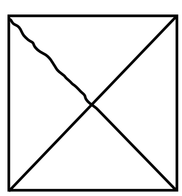
a. Usando instrumentos trace un cuadrado cuyo lado mida 15 centímetros.

b



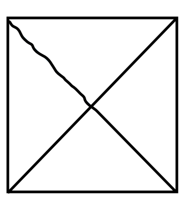
b. Trazar una de las diagonales. Describir las figuras que se generaron.

c



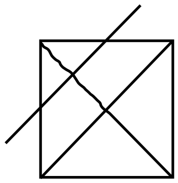
c. En uno de los triángulos anteriores, trazar una línea perpendicular desde el punto medio de la diagonal al vértice opuesto. Prolonzar el trazo como línea punteada hasta el vértice del otro triángulo.

d



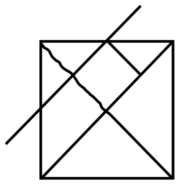
d. Ubicar el punto medio del segmento de línea punteado.

e

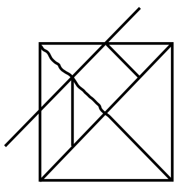


e. En el triángulo en el que quedó la línea punteada, trazar una línea paralela a la diagonal, que pase por el punto medio recién ubicado. Describir las figuras que se generaron.

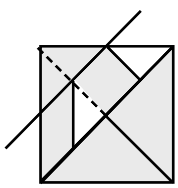
f



f. Marcar el segmento punteado que quedó en el cuadrilátero. En una de las mitades, trazar un cuadrado y un triángulo rectángulo. En la otra, trazar un triángulo rectángulo del mismo tamaño que el anterior y un paralelogramo.



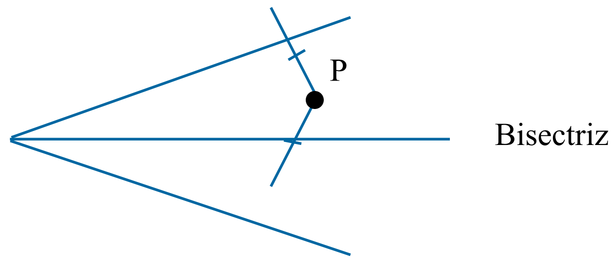
g



g. Recortar las siete figuras que le quedaron.
¡Acaba de construir un Tangram!

Bisectriz

Se llama así a la línea que divide a un ángulo, en dos ángulos congruentes, esto es, de la misma medida.

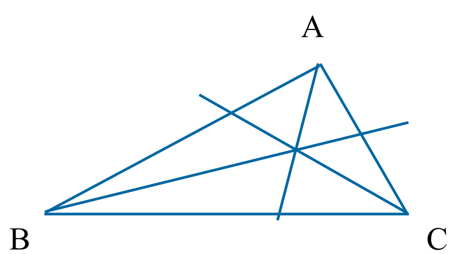


Propiedad: los puntos que pertenecen a la bisectriz equidistan de los lados de un ángulo.

Actividad 6

Modalidad de trabajo: individual
Materiales: regla, escuadra, transportador.

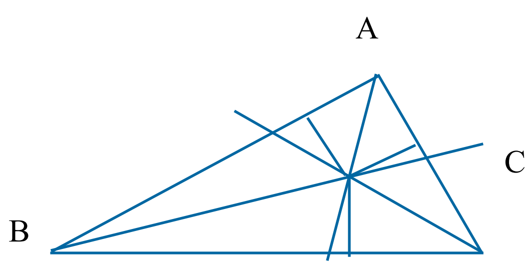
a. Construir un triángulo ABC, tal que AB = 8 cm., BC = 10 cm. y AC = 5 cm.



b. Trazar las bisectrices de los tres ángulos del triángulo construído.
¿Qué ocurre con las líneas trazadas?

El punto de intersección de las bisectrices se llama ***incentro.***

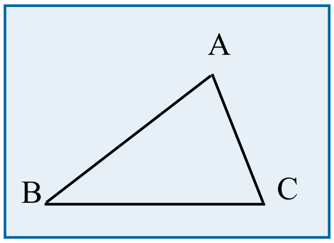
c. Desde el incentro trazar líneas perpendiculares a los lados del triángulo



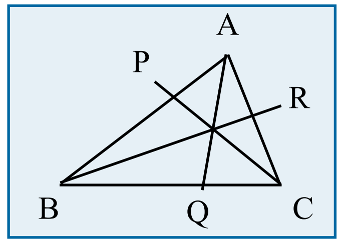
d. Comparar las medidas de los segmentos trazados del incentro a los lados. ¿Qué observa?

Actividad 7

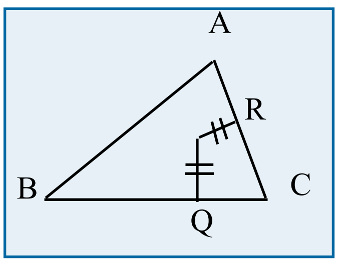
Modalidad de trabajo: individual.
Procedimiento: observe la secuencia y describa lo que representa.



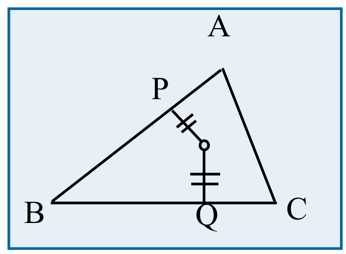
A



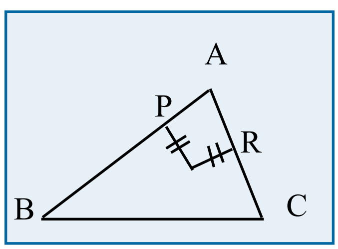
B



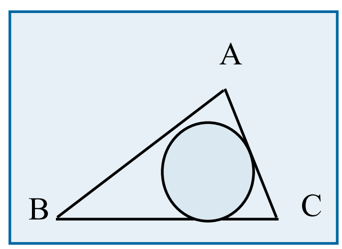
C1



C2



C3



D

a. ¿Cómo le llamaría al proceso?

b. ¿Si ABC es equilátero, cual es la ubicación de los puntos P,Q , R con repecto a los puntos A y B, B y C , A y C, respectivamente?.

Mediatriz

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular a dicho segmento en su punto medio.

Propiedad: los puntos que pertenecen a la mediatriz equidistan de los extremos del segmento dado.

Actividad 1

Modalidad de trabajo: parejas

Materiales: regla, escuadra, recorte de trazo de triángulo usado en la actividad anterior.

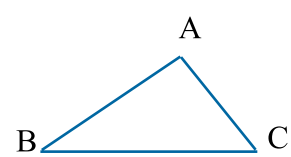
Procedimiento:

a. Trazar un triángulo ABC como en la actividad anterior.

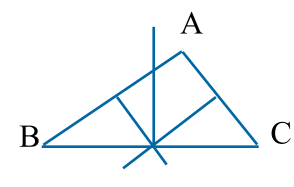
b Trazar las mediatrices de los tres lados del triángulo y ubicar el punto de intersección

Actividad 2

Materiales: regla, escuadra, trazo de triángulo usado en la actividad anterior.
Procedimiento:

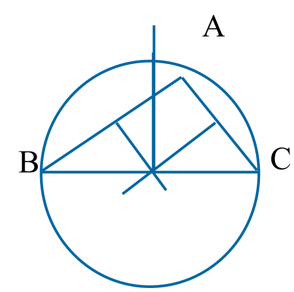


a. Trazar triángulo ABC como en la actividad anterior.



b. Trazar las mediatrices de los tres lados del triángulo y ubicar el punto de intersección.

c. Mida la distancia desde el punto de intersección a cada vértice ¿ qué puede decir de esas distancias?



d. Gradúe el compás tomando como abertura la distancia desde el punto de intersección a un vértice.

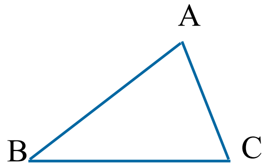
e. Trazar una circunferencia con centro en el punto donde se intersectan las tres mediatrices.
Describa la relación entre el triángulo dado y la circunferencia trazada.
Debido a esta relación, el punto de intersección de las mediatrices de un triángulo se llama ***circuncentro***.

Mediana

Se llama así al segmento de recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.
Propiedad: las medianas de un triángulo concurren en un punto llamado baricentro.

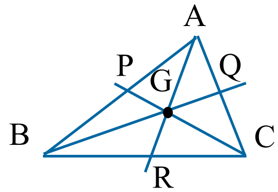
Actividad 1

Material: cartulina, aguja , lana, regla.
Procedimiento:



a. Trazar en cartulina un triángulo cualquiera.

b. Trazar sus medianas y ubicar el baricentro.



c. Medir la longitud de los segmentos AR, GR, BQ, GQ, CP y GP.

d. Calcule las razones $\frac{AR}{GR}$, $\frac{BQ}{GQ}$ y $\frac{CP}{GP}$

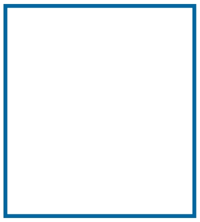
Con base en esta información: ¿qué puede decir de la ubicación de G, respecto a los puntos medios de los lados del triángulo?

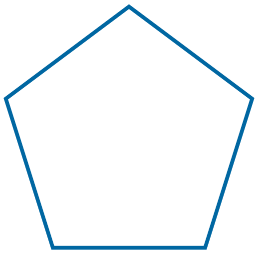
e. Preparar la aguja con lana, anudar en un extremo, hacerla pasar perforando el baricentro y sostener el extremo en alto. Describir que observa. Debido a la propiedad observada al baricentro, también se le llama centro de masa.

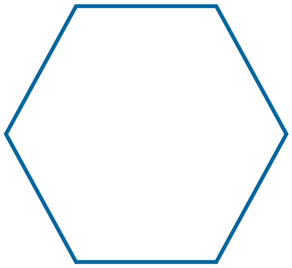
Polígonos

Son figuras cerradas formadas por segmentos de recta llamados lados; los puntos en donde se intersectan se llaman vértices.

De acuerdo con el número de lados que tienen los polígonos reciben nombres particulares, por ejemplo:


Cuadrilátero


Pentágono


Hexágono

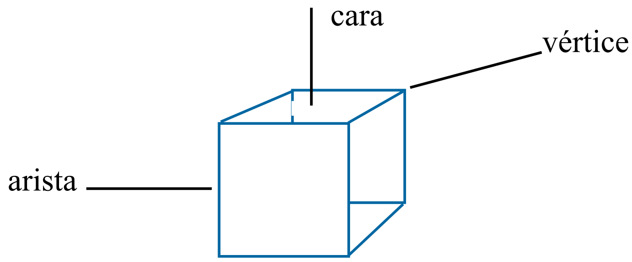
Si todos los lados tienen la misma medida, se llaman polígonos regulares, en caso contrario polígonos irregulares. ¿Cuáles de los polígonos mostrados son regulares?

El segmento de línea que une dos vértices no adyacentes recibe el nombre de diagonal.
¿Cuántas diagonales tiene un cuadrado, un pentágono, un hexágono?

Una buena parte del trabajo con los polígonos se orienta a determinar la medida de su contorno o perímetro y a la medida de la superficie que limitan, esto es, de su área.

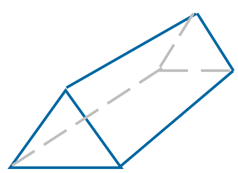
Poliedros

Son cuerpos tridimensionales con superficies planas llamadas caras.
Las caras de un poliedro son polígonos que al unirse forman las aristas, conocidas comúnmente como orillas o bordes. El punto de intersección de varias aristas se llama vértice.

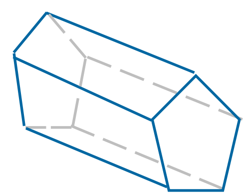


Los poliedros que tienen dos caras paralelas y congruentes (de las mismas medidas), se llaman prismas, que de acuerdo con la forma de las bases reciben nombres especiales:

Prisma rectangular



Prisma triangular



Prisma pentagonal

Nota histórica

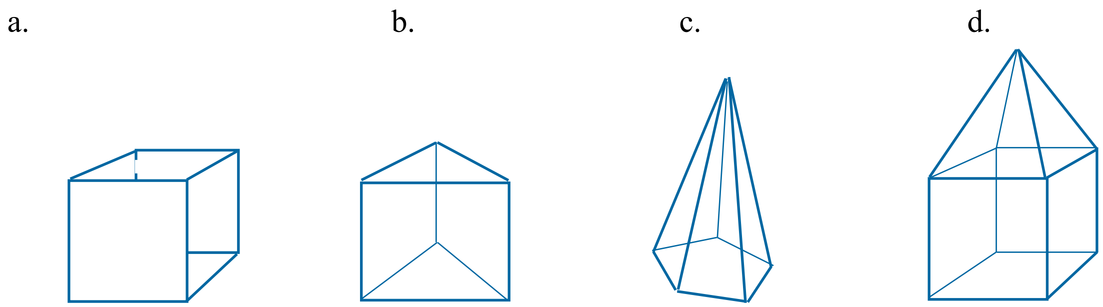
El suizo Leohard Euler es considerado uno de los más prolíferos y brillantes matemáticos de todos los tiempos.

En sus 76 años de vida produjo más de 850 libros y muchísimos documentos sin publicar.

Un problema interesante que trabajó fue: ¿ qué relación existe entre el número de caras, vértices y aristas de un poliedro?

Euler encontró una expresión válida para cualquier poliedro, regular o irregular.

Para tratar de comprender la fórmula que obtuvo Euler , usaremos como estrategia considerar algunos poliedros particulares , registrar datos en una tabla y tratar de descubrir un patrón.



¿Qué forma tienen las caras de estos prismas?

Poliedro	#Caras	#Vértices	# Aristas
Cubo	6	8	12
Fig. b	5	6	9
Fig. c	6	6	10
Fig. d	9	9	16

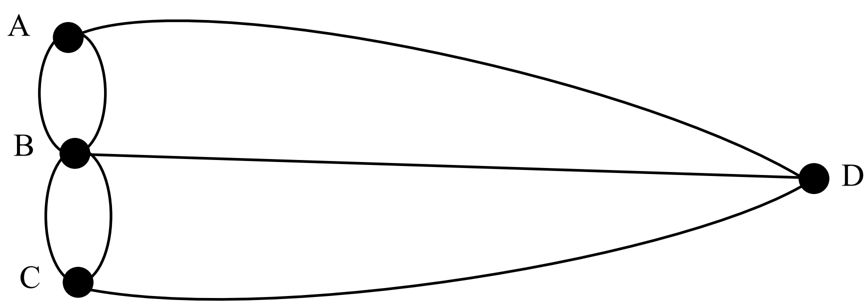
Puede notarse que en todos los casos analizados, la suma del # de caras y el # de vértices es 2 unidades mayor que el # de aristas.

Si a = # de aristas , c = # de caras y v = # de vértices, esta relación puede escribirse como:

$$c + v - 2 = a \ ; \ \text{o bien} \ a = c + v = a + 2.$$

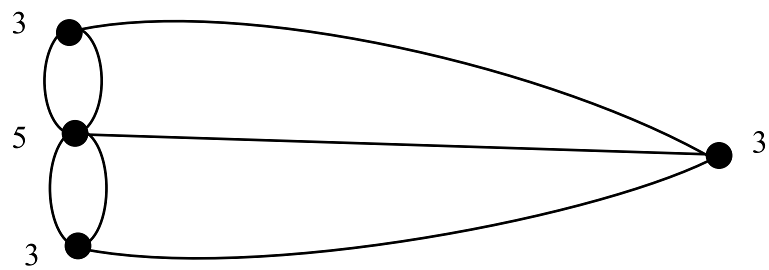
Posteriormente, en una ciudad se construyeron 7 puentes y se buscaba un recorrido contínuo sin cruzar por ningún puente más de una vez.

Euler representó las regiones de la ciudad con letras y modeló el problema de la siguiente forma:



El problema se redujo a dibujar el diagrama sin levantar el lápiz ni volver a pasar por el mismo punto.

Euler identificó cada punto con el número de líneas que terminan en él.



Argumentó que cada pasada por un punto involucra una entrada y una salida (excepto posiblemente el inicio y el final del recorrido). Por lo tanto cada punto debía estar identificado con un número para hacer posible el recorrido buscado.

Concluyó que el recorrido era imposible.

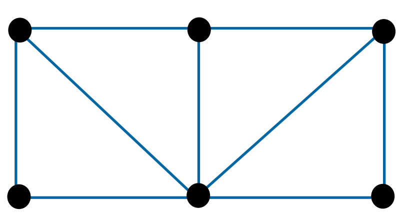
En el lenguaje moderno, un diagrama como el mostrado se llama ***red***, cada punto es un ***vértice*** y cada línea es una ***arista***.

Una red es atravesable si se puede dibujar de un sólo trazo, sin volver a pasar por la misma arista.

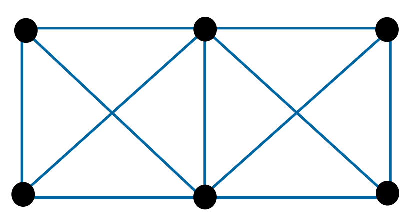
Actividad 1

Determinar si las siguientes redes son atravesables y explique su respuesta.

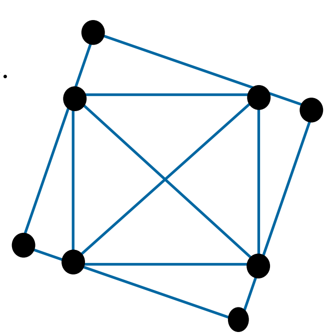
a.



b.



c.



ACTIVIDADES PARA REALIZAR CON LOS ALUMNOS

Como punto inicial de esta sección queremos proponerle que trabaje la en la adecuación de las actividades que acaba de realizar, para que los niños adquieran destreza en la construcción de segmentos de recta, rectas paralelas y rectas perpendiculares, usando instrumentos.

Las actividades que presentamos requieren para su realización de la combinación de la observación y descripción de las características de las figuras planas y tridimensionales, así como de su clasificación y medición, lo cual es registrado ordenadamente para su análisis.

Actividad 1

Clasificación de figuras planas y tridimensionales, a partir de la observación y descripción de sus características.

Materiales: juegos de círculos, cuadrados, triángulos en 3 colores y 2 tamaños.
Modalidad de trabajo: equipos de tres personas.

Procedimiento.

a. Cada equipo debe contar con un juego de las figuras construidas.

b. Los niños formarán dos grupos, separando las figuras que se parecen de las que no se parecen.

c. Cada equipo expresará por turno las diferencias y semejanzas entre los grupos que separó.

d. Algunos criterios de clasificación pueden ser: las que tengan la misma forma, las que sólo tengan lados rectos, las que tengan igual tamaño, etc.

e. Posteriormente, se solicita que los equipos las clasifiquen nuevamente, pero que lo hagan en más de dos grupos.

f. Además del juego de figuras anteriores, cada equipo agrega otras como rombo, trapecio y hexágono (las que se usaron para la enseñanza de fracciones). Inicialmente, se verifica que los integrantes identifiquen a cada una con su nombre.

g. Cada equipo selecciona una figura y la describe, tratando de no decir su nombre, sino por ejemplo: su número de lados, número de vértices, color, tamaño (si hay varios), etc.

h. Por turno, cada equipo indica a los demás la descripción de la figura que seleccionó. Todos los demás equipos tratan de seleccionar la figura que corresponda a la descripción.

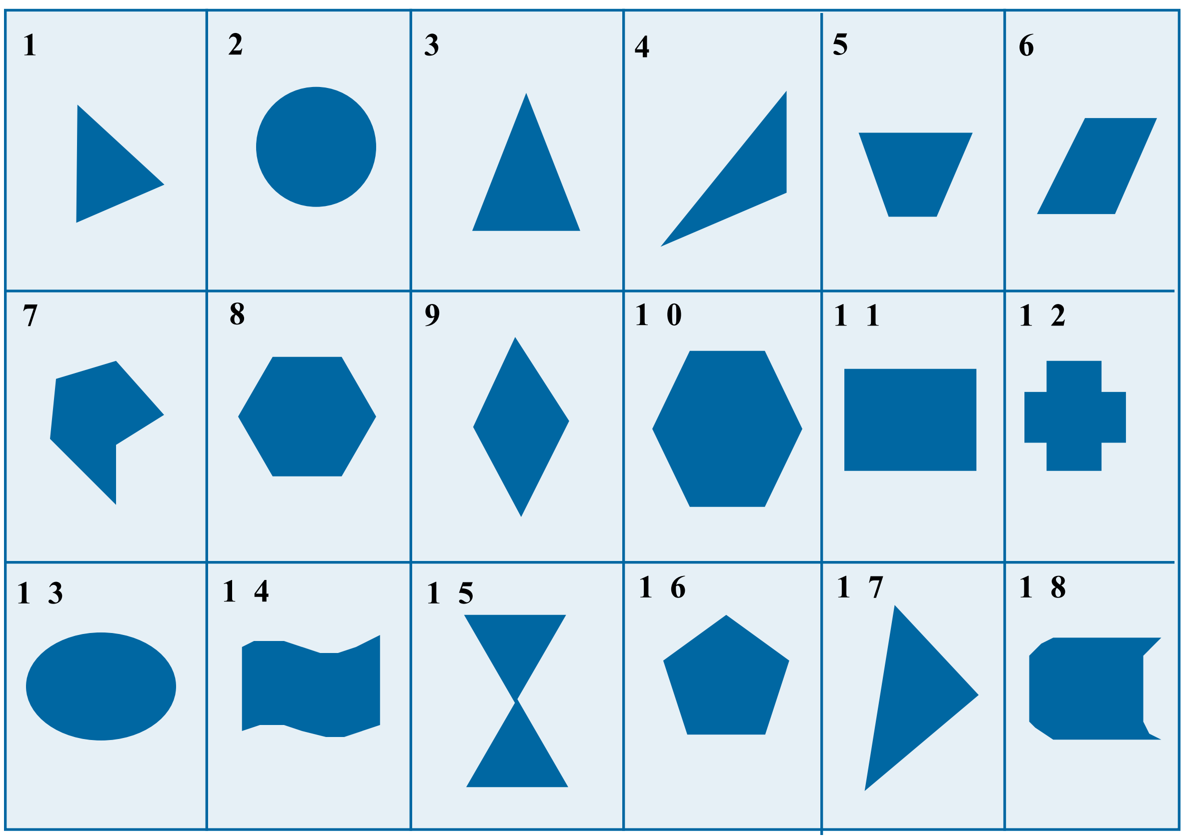
i. El equipo que describe gana un punto por cada equipo que acierte en la elección de la figura que describió. También ganan un punto los equipos que acertaron. Se construye una tabla en el pizarrón para registrar los puntajes.

Variante.

Cada equipo selecciona una figura pero no la describe, sino que responde sí o no a las preguntas que por turnos le formulen los equipos. Cada equipo sólo puede hacer una pregunta. Por ejemplo: en vez de preguntar: ¿cuántos lados tiene? o ¿de qué tamaño es?, deberán peguntar: ¿tiene cuatro lados?, ¿es grande?, etc.

Para los últimos grados de primaria se propone la clasificación, tomando en cuenta características como: número de lados, número de ángulos iguales, lados paralelos, perpendiculares, etc.

Si pueden construirse las siguientes figuras, sería conveniente, en caso contrario pueden usarse las gráficas:



Las figuras deben clasificarse en dos o más grupos, tomando en cuenta características como igualdad de los lados, ángulos rectos, lados curvos, etc.

Completar la siguiente tabla, marcando con una x las propiedades que tiene cada figura:

Número de figura	Un par de lados paralelos	Dos pares de lados paralelos	Un par de lados perpendiculares	Dos pares de lados perpendiculares	Todos sus lados iguales

Actividad 2

Se busca construir y comparar figuras diferentes cuyo perímetro es igual.
Materiales: cordel, lana o cáñamo de 40 cm, papel cuadriculado o geoplano.
Modalidad de trabajo: en pareja.

Procedimiento:
Nivel inicial:

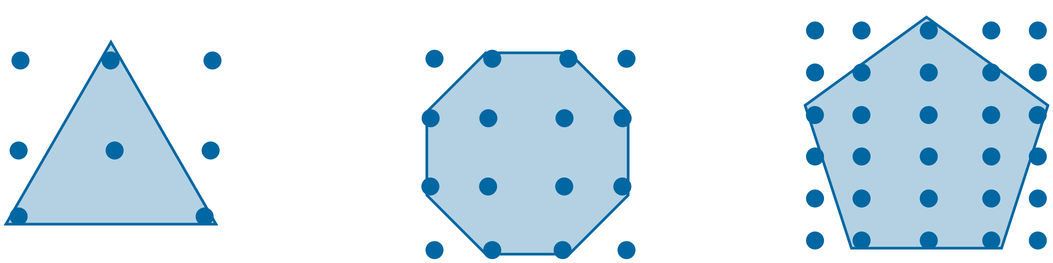
a. Cada pareja atará los extremos del cordel tratando de que se desperdicie la menor cantidad posible al anudar.

b. Sosteniendo con las manos el cordel atado, formarán la figura que se le indique: triángulo, cuadrado, rectángulo, rombo, trapecio.

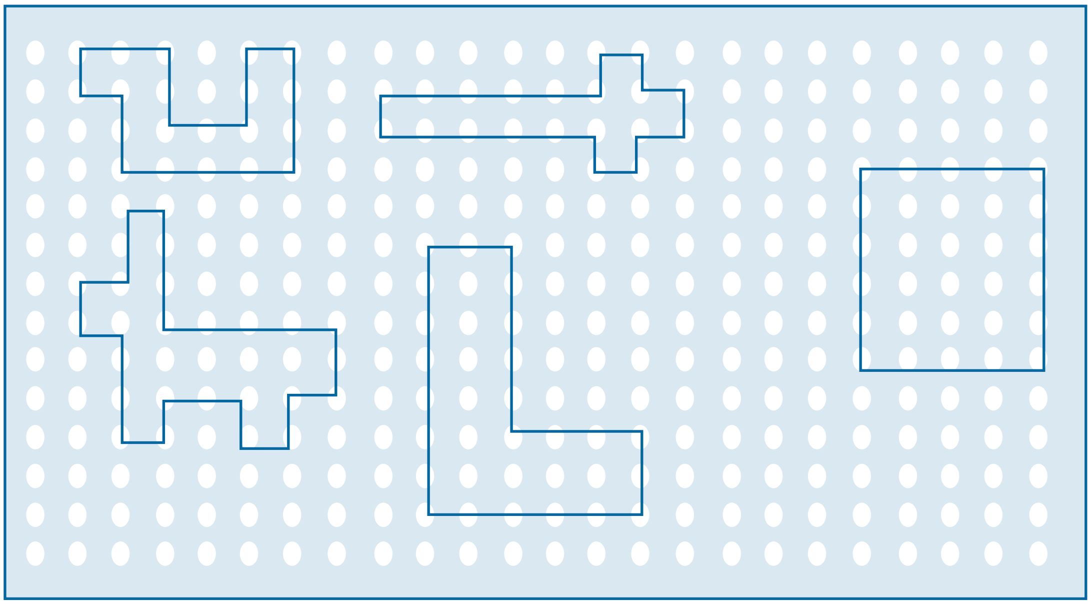
c. Las parejas responderán preguntas como: ¿cuánto mide el perímetro de cada figura? ¿Cuál de las figuras formadas tiene el mayor perímetro?

d. Proponga a los niños que dibujen en su cuaderno las figuras formadas.

Reproducir en papel cuadriculado o en el geoplano, las siguientes figuras:



Nivel intermedio:



a. Numerar las figuras y distribuirlas entre los miembros de la pareja. Determinar el perímetro tomando como unidad de medida el lado de una cuadrícula; de manera similar determinar el área de cada una, tomando como unidad de área una cuadrícula.

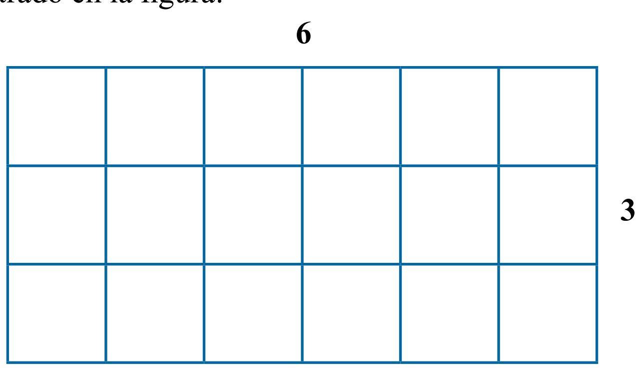
b. Construir una tabla en que la aparezca el número de la figura, su perímetro y su área.

c. Analizando los datos registrados responder las preguntas: ¿Cuáles figuras tienen igual área?, ¿Cuáles figuras tienen igual perímetro?, ¿Las figuras con igual área, tienen el mismo perímetro?, ¿Si una figura tiene mayor área que otra, también tiene mayor perímetro?

d. Discutir las respuestas con el grupo.

Nivel superior:

La idea anterior puede profundizarse en quinto grado, a partir de la presentación de un rectángulo de perímetro 18 cm, mostrado en la figura:

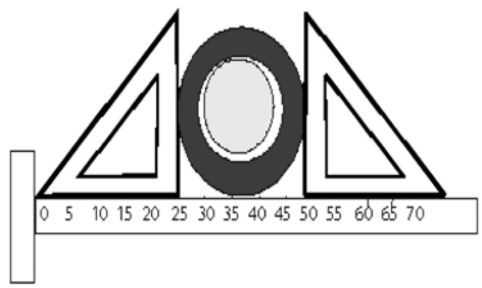


Puede observarse que la superficie de la figura es recubierta por l8 cuadrados de una unidad en cada lado. Nótese, además, que la parte horizontal tiene una longitud de 6 unidades y la parte vertical de 3. Como conclusión, puede decirse que el valor del área coincide con el producto de la longitud del lado horizontal por la longitud del lado vertical.

Dibujar 3 rectángulos más cuyo perímetro siempre sea 18, y determinar el área de cada uno. ¿Qué le sucede al área si el perímetro permanece constante?

Actividad 3

Se sugiere que esta actividad se realice en los últimos grados de la escuela primaria, pues se busca descubrir expresiones para calcular el perímetro de un círculo.



Materiales: tapaderas circulares, cinta métrica, cordeles, regla, escuadras.
Modalidad de trabajo: equipos de tres personas.
Procedimiento:

a. Cada equipo selecciona 6 tapaderas de forma circular y las identifica con un número o una letra.

b. Cada miembro del equipo toma dos tapaderas y efectúa mediciones del diámetro y perímetro aproximándolas a centímetros.

Para medir el perímetro pueden usarse cintas métricas o recorriendo el contorno con un cordel y luego determinando la medida de éste. Si se usa el último procedimiento, es conveniente marcar el inicio y el final con nudos.

Para determinar la medida del diámetro puede trazarse un círculo con la tapadera y determinar la medida en el dibujo; también pueden usarse instrumentos como se muestra en la figura.

c. Si llamamos c al perímetro de cada tapadera circular y d a su diámetro, dividir c/d y anotar los datos en una tabla, como la siguiente:

No de tapadera	Valor de c	Valor de d	Resultado c/d

d. Promedie los valores obtenidos, ¿a qué valor se aproxima el resultado de dividir c entre d?

Este número fue descubierto en la antigüedad y se denota por π. Podemos reescribir la expresión anterior: $\frac{c}{d} = \pi$, siendo ésta una igualdad,

Podemos multiplicar ambos lados por la cantidad d y las condiciones de igual se mantienen. Esto es:

$C = \pi \times d$, que es la famosa fórmula que permite calcular el perímetro de un círculo.

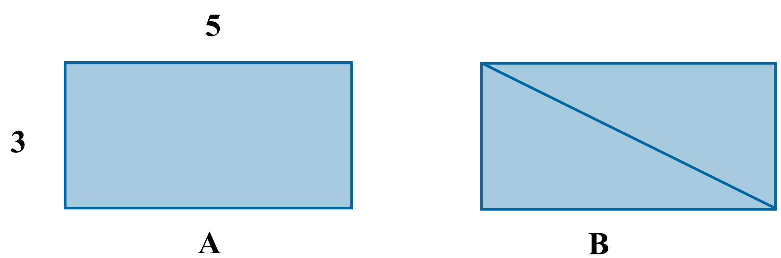
A veces se espresa como $C = 2\pi r$

Actividad 4

Se sugiere que esta actividad se realice en los últimos grados de la escuela primaria, ya que trata de descubrir una expresión para calcular el área de un triángulo.

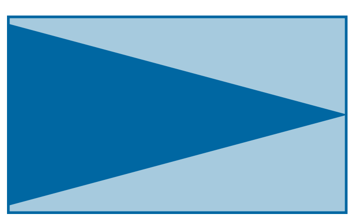
Materiales: rectángulos, regla, tijeras.
Modalidad de trabajo: Equipos de tres personas.
Procedimiento:

Dibujar un rectángulo como el mostrado en (A) y calcular su área. Trazar una diagonal para producir el dibujo mostrado en (B)



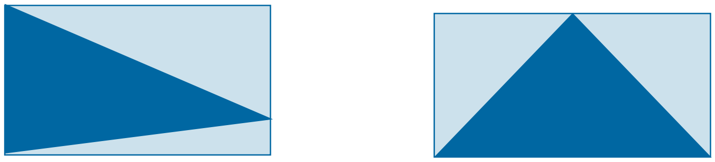
Observado la figura, se nota que el rectángulo se dividió en dos triángulos iguales. ¿Cuánto mide el área de cada triángulo?

a. Dibujar un rectángulo con un triángulo inscrito como se muestra en la figura:



Calcular el área del rectángulo. Recortar el triángulo inscrito y con los triángulos sobrantes formar otro triángulo. Comparar el triángulo recortado y el que se formó: ¿Cómo son los triángulos?, ¿Cuánto vale el área de cada uno?

b. Repetir el procedimiento, usando figuras como:



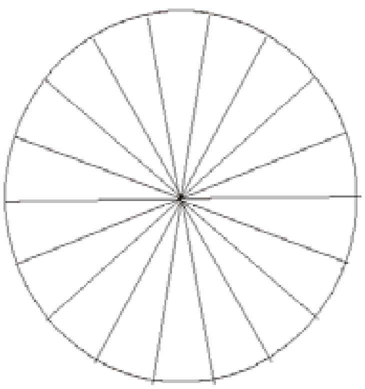
c. Construir una expresión para calcular el área de un triángulo.

Actividad 5

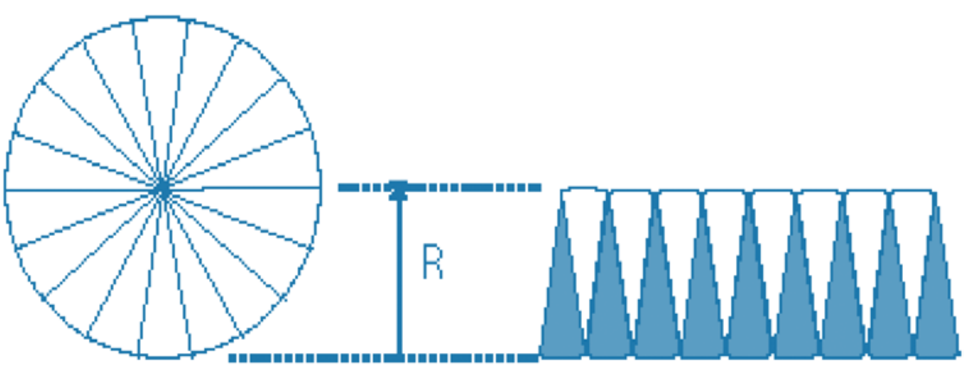
Se sugiere que esta actividad se realice en sexto grado, ya que se busca descubrir una expresión para calcular el área de un círculo.
Materiales: rectángulos, compás, regla, tijeras.
Modalidad de trabajo: equipos de tres personas.

Procedimiento:

Trazar un círculo de 3 cm. de radio y dividirlo en 18 partes, como se indica en la figura:



a. Cortar las partes y pegarlas como se indica:



b. Es necesario notar que con el área del círculo se recubrió aproximadamente el área del rectángulo, de manera que al calcular el área del rectángulo, automáticamente se conoce el valor del área del círculo. Esto lleva a responder las preguntas: ¿Cuánto mide cada uno de los lados del rectángulo? ¿Cuál es su área?

c. Si el radio cambia a 5 cm., ¿cuánto vale ahora el área del círculo? Escriba una expresión que permita calcular el área de un círculo, si se conoce el valor de su radio.

Actividad 6

Se trata de observar, describir y clasificar figuras tridimensionales.

Materiales: cajas, frascos, poliedros formados.
Modalidad de trabajo: equipos de tres personas.

Procedimiento:
Nivel inicial:

a. Cada equipo debe contar con cajas y frascos de diferentes formas y tamaños. Se solicita que los miembros del equipo reúnan los objetos que cada uno lleva. Luego deberán clasificarlos en dos o más grupos, describiendo las características de cada grupo: todas las caras iguales, todas las caras de cuatro lados, número de vértices, etc.

b. Enseguida puede hacerse lo siguiente: cada integrante del grupo debe tomar una de las cajas y dibujar en un papel el contorno de las caras que sean diferentes.

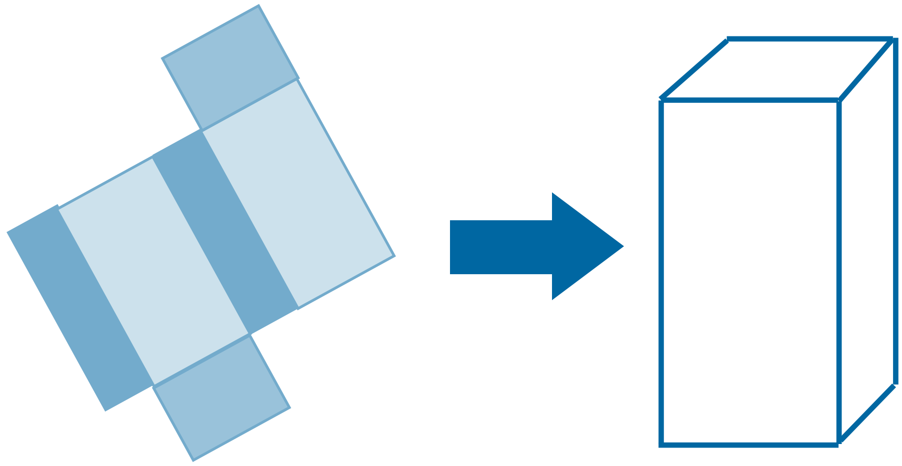
c. Cuando los tres terminan, intercambian los dibujos con otro equipo, incluyendo los objetos. Cada miembro del equipo buscará un objeto semejante al que recibe.

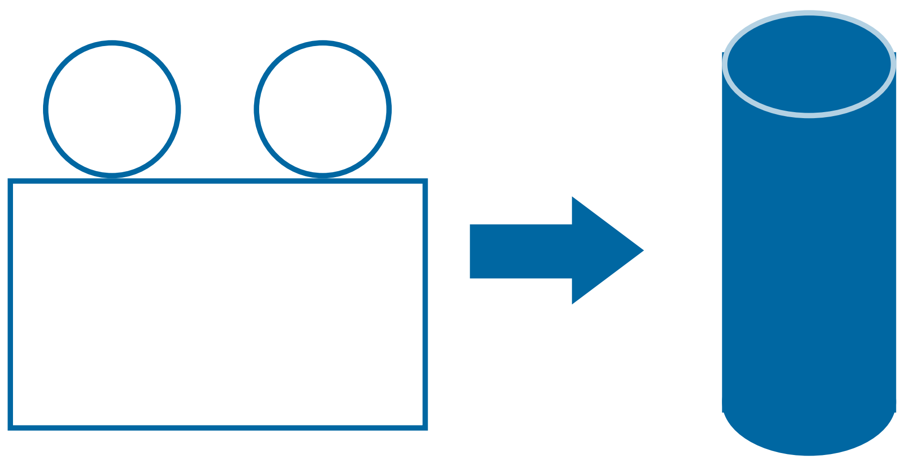
d. Gana el equipo que los identifique primero.

e. Cada miembro del equipo toma una de las cajas y dibuja todas las caras de manera que pueda formar una plantilla.

f. Luego cortar y pegar la plantilla para reproducir la figura. Es importante tomar en cuenta que será conveniente dejar algunos espacios para pegar. Lo anterior se ilustra en la siguiente figura:

Nivel intermedio:





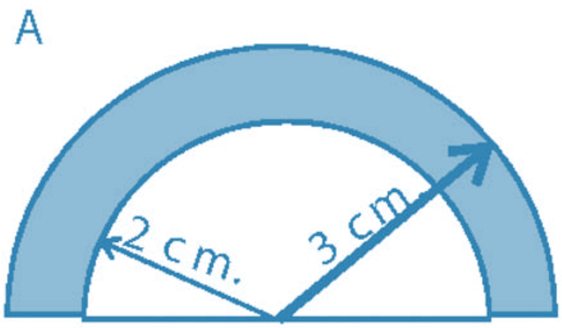
a. Describir los poliedros que se encuentren en el grupo de figuras, incluyendo número de vértices, aristas, etc. y clasificándolos de acuerdo con estas características.

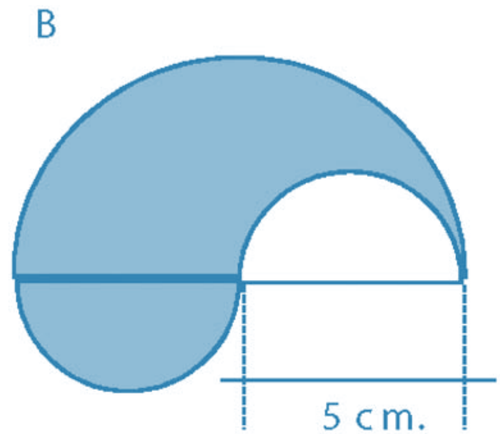
b. Utilizando algunas cajas vacías, que cada miembro del equipo seleccione dos de ellas y calcule el área superficial (área de todas las caras) y el volumen. Registrar los datos en una tabla.

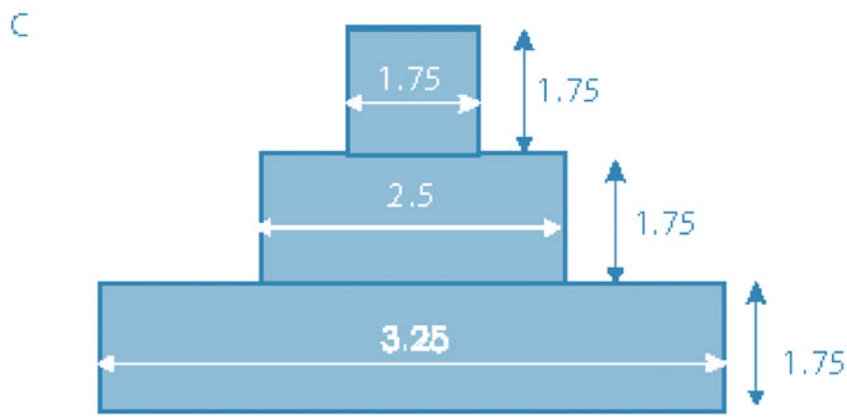
c. Clasificar el grupo completo de figuras tomando en cuenta características como caras paralelas, caras perpendiculares, forma de la base, etc. Las figuras deben llamarse por su nombre, por ejemplo octoedro, hexaedro, pirámide de base cuadrada, etc.

Para concluir el capítulo, queremos recordarle que lo más importante de ser docente, es la oportunidad de aprender continuamente para poder ayudar a nuestros alumnos a que aprendan.

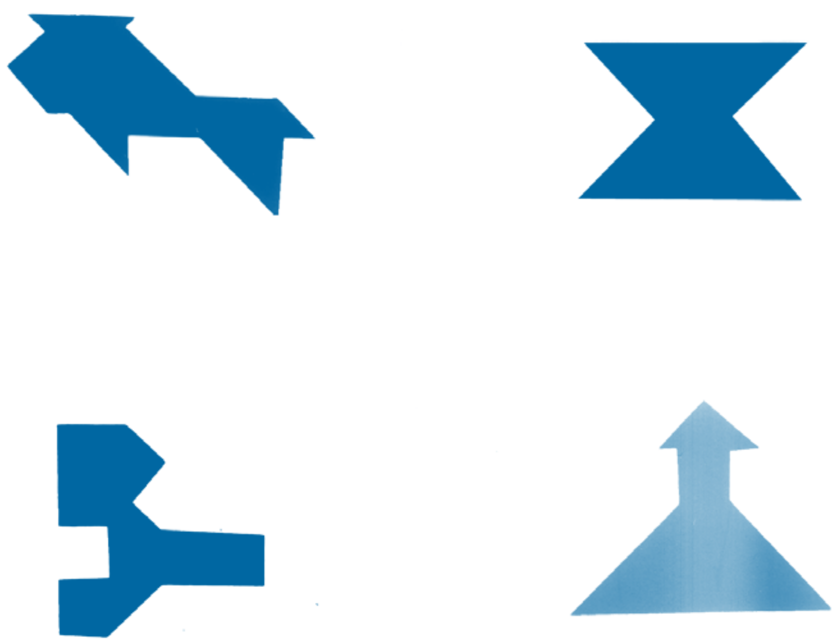
Calcular el área de color azul en las siguientes figuras.







Formar las figuras mostradas utilizando el Tangram y calcular el perímetro y área de cada una.



Actividad 7

Modalidad del trabajo: individual.

Procedimiento: solicite a los niños que escriban las diferencias y similitudes entre los cuadriláteros dados.

a.  y 

b.  y 

c.  y 

d.  y 

e.  y 

f.  y 

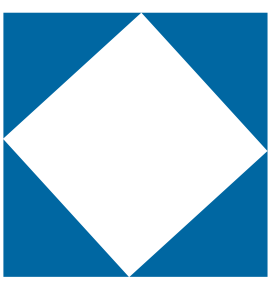
Actividad 8

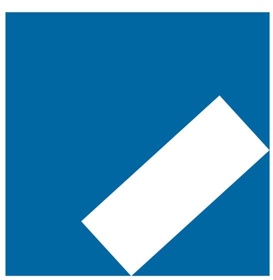
Materiales: papel, regla, escuadra.

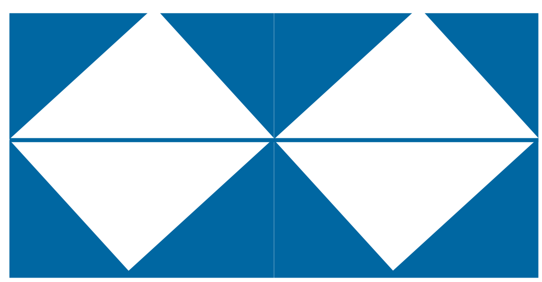
Modalidad del trabajo: en pareja.

Procedimiento:

a. Dibujar en el pizarrón figuras como las mostradas:







b. Solicite a los niños que las reproduzcan y que al final presenten la secuencia de pasos que usaron en cada caso. Es importante que no dé instrucciones a los alumnos acerca de cómo proceder; anímelos a que organicen sus acciones, ensayen, simplifiquen, etc.

c. Cuando terminen, pida a algunos niños que reproduzcan sus figuras en el pizarrón juntamente con el procedimiento usado; promueva que comparen los distintos procedimientos y determinen el más simple.

Actividad 9

Modalidad del trabajo: grupos de tres personas.
Procedimiento: escriba en el pizarrón la información dada a continuación para que los niños dibujen figuras que tengan las características descritas:

a. Cuadrilátero con cuatro ángulos iguales.

b. Cuadrilátero con todos sus lados de distinta medida.

c. Cuadrilátero con dos lados paralelos y dos ángulos rectos.

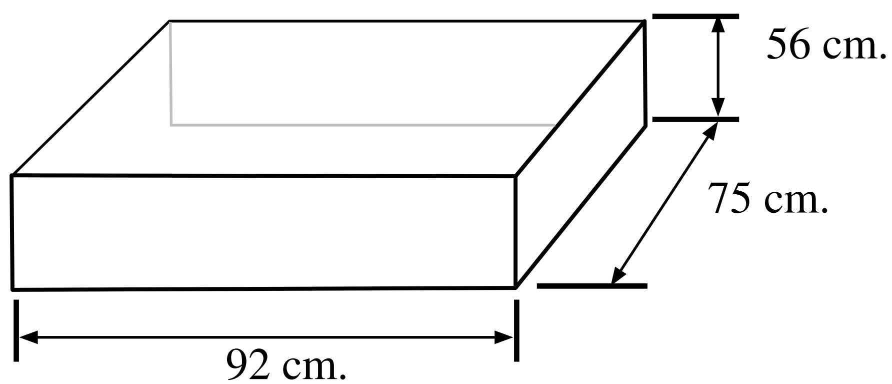
d. Cuadrilátero con dos pares de lados paralelos y que no tenga ángulos rectos.

e. Si hay figuras distintas en cada caso, promueva que los alumnos argumenten al respecto.

SUGERENCIAS DE TRABAJO

Aprendiendo Matemática.
Le proponemos que resuelva en su texto paralelo la siguiente situación problema:

Una pecera con forma de octoedro tiene 92 cm. de lago, 75 cm. de altura y 56 cm. de alto, como se indica en la figura:



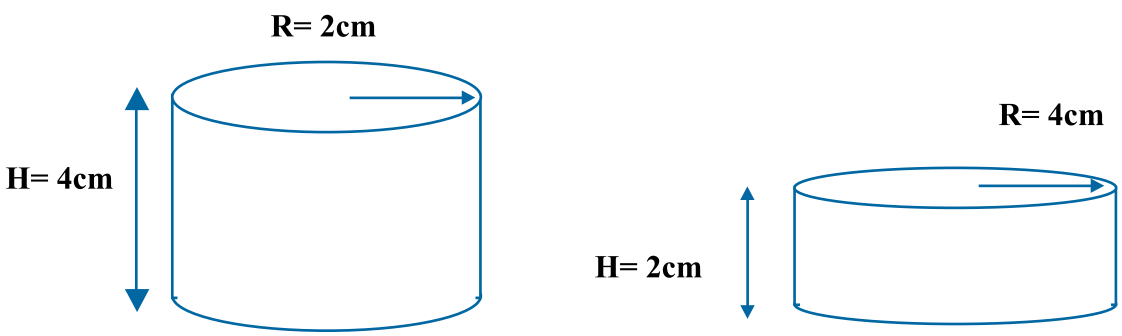
a. Calcular el volumen de la pecera en centímetros cúbicos, metros cúbicos y litros.

b. Si se llena de agua hasta 40 cm. de altura: ¿cuántos litros de agua se echaron?

c. Si cuando se introducen los peces, la altura sube a 57 cm, ¿cuál es el volumen del grupo de peces?

Para ponerse a pensar:

Dados los cilindros mostradas en la figura, responder las preguntas formuladas:



a. ¿Cuál de los cilindros tiene mayor volumen y mayor área superficial?
b. ¿Qué le sucede al volumen de un cilindro si se duplica su radio pero la altura es la misma?
c. ¿Qué le sucede al volumen de un cilindro si se mantiene fijo el radio y se duplica la altura?

Para conocer cómo piensan los niños.

Pida a los niños que reproduzcan la siguiente figura, registre las estrategias que utiliza.

Actividades didácticas

Organice a los niños en equipos, llévelos a un área abierta e indique a diferentes grupos que se ubiquen de manera que formen distintas figuras: triángulos, cuadrados, rectángulos, pentágonos, círculos. Cuando todos conozcan la figura que deberán formar, dé la señal de inicio. Gana el grupo que primero forme la figura. Repita el procedimiento cambiando las figuras a los grupos.

Lecturas complementarias

Le sugerimos que investigue en diversas fuentes, acerca de los aportes de Euclides a la Geometría.

CAPÍTULO VI

NOCIÓN DE CONJUNTO INFINITO Y DEL CERO

INTRODUCCIÓN:

En este capítulo se revisan los conceptos de infinito y de cero, así como las formas en que usualmente se enseñan en el nivel primario.

En el análisis realizado se evidencian las ideas asociadas con estos conceptos, que generan dificultades en aprendizajes posteriores.

En la parte didáctica, se proponen algunas actividades, pero más que todo se fija una posición conservadora en cuanto al desarrollo de estos temas durante la etapa de educación básica.

Noción de infinito

La intención de profundizar en la idea de infinito se ha constituido en uno de los grandes desafíos para la mente humana. A su alrededor se han generado muchas reflexiones y discusiones de corte filosófico, religioso, matemático y hasta romántico.

Algunas expresiones que se usan en la vida cotidiana, asociadas con la noción de infinito son:

- “Te lo he dicho una infinidad de veces”
- “La madre lo vió con infinita ternura....”
- “Nuestro amor es infinito...”
- “Estamos infinitamente agradecidos por las muestras de amistad que recibimos”

El sentido de estas expresiones se basa en el significado de la palabra infinito: que no tiene fin.

La idea transmitida es que una cantidad de veces, la ternura, el amor y el agradecimiento son lo más grande posible que se puede imaginar.

ACTIVIDADES PARA EL DOCENTE

Diversos diccionarios de reconocido prestigio en ámbitos académicos, consideran que son sinónimos de infinito: absoluto, extenso, ilimitado.

Cuando la idea de infinito se aplica a conjuntos, es usual que su enseñanza se realice a la par de los conjuntos finitos, indicando que a éstos se les pueden contar sus elementos, mientras que a los infinitos no.
Este cambio, al parecer insignificante, respecto al sentido manifiesto en las expresiones anteriores, ocasiona que cuando se ejemplifican los conjuntos infinitos, inclusive en algunos libros de texto, se encuentren algunos como los siguientes:

A: Estrellas del universo.
B: Granos de arena que hay en el mar.
C: Hojas de todos los árboles del mundo.

Analicemos individualmente cada ejemplo.

A: Las estrellas se acumulan en galaxias que se distribuyen por todo el universo.

Las observaciones realizadas hasta el presente indican que el universo está formado aproximadamente por 100 millones de galaxias que albergan a un número también aproximado de cuatrocientos mil millones de estrellas.

Esta información evidencia que si bien la cantidad de estrellas descubiertas es muy grande y no es constante, existe un número para representarla. Por lo tanto este no es un conjunto infinito.

B: Conjunto de granos de arena que hay en el mar.

Se acepta que la tierra es de forma esférica y su radio ha sido determinado con bastante exactitud. Por lo tanto es posible calcular su volumen.

Además, se sabe que sólo el 29.2% es tierra firme,la cual incluye un porcentaje de arena.

Conociendo la proporción de arena en distintas partes del planeta, se puede determinar el volumen total de arena.

Usando métodos especiales se estima cuántos granos de arena hay en un milímetro cúbico y entonces puede calcularse aproximadamente no sólo cuánta arena hay en el mar si no en todo el planeta.

En consecuencia este conjunto tampoco es infinito.
Las ideas que están expresadas en los ejemplos analizados, asocian al infinito con cantidades muy grandes, desconocidas, variables o difíciles de contar.

Consideramos importante enfatizar, que cuando se dice que un conjunto es infinito, se refiere a que no se le pueden contar sus elementos, no se refiere a que no exista un método de conteo, o que el número sea indeterminado debido a su variación constante.

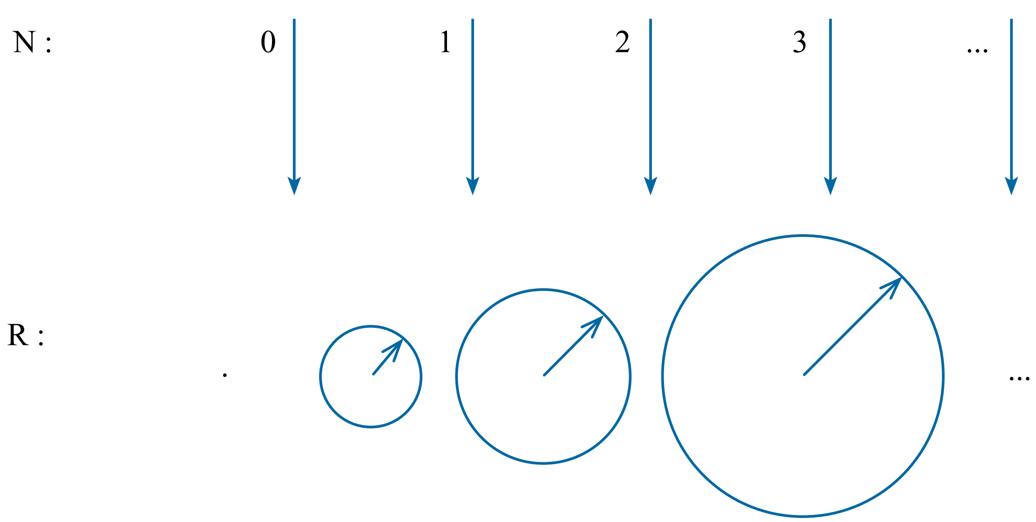
Significa que no se puede determinar cual es el último, porque continúan apareciendo indefinidamente.

El ejemplo que muestra por excelencia este comportamiento, es el conjunto de los números naturales. Pensemos en un número natural muy grande, por ejemplo, 5 millones.

Podemos hacerlo crecer al sumarle 1, luego otro 1 y así sucesivamente. Siempre podremos encontrar un número mayor, por lo tanto, no podemos determinar el último elemento.

El hecho de que el conjunto de los números naturales realmente sea un ejemplo de conjunto infinito, nos indica que otros conjuntos infinitos son aquellos que puedan ponerse en una correspondencia uno a uno con ellos.

En consecuencia, el infinito, no infinita no es un número,
es la representación de la idea de crecer o decrecer sin límite.



Como a cada número natural le corresponde una circunferencia de radio R, resulta que el conjunto de circunferencias de radio R también es infinito.

Siempre podremos encontrar una circunferencia de radio mayor, por lo tanto, no podemos determinar el último elemento de ese conjunto.

Actividad 1

a. Busque en revistas, libros y periódicos expresiones que incluyan el sentido de infinito.

b. Reúnase con algunos compañeros y analicen que significado tienen.

c. Con base en las ideas presentadas en esta sección, propongan y discutan ejemplos de conjuntos infinitos.

Noción del cero

La idea del número natural nace asociada a la necesidad del conteo, de esta manera la idea de número indica cuantos objetos de una clase hay.

Actualmente la idea de ausencia de cantidad es conocida por los niños antes de ingresar a la escuela, de manera que en la realidad la noción de cero no constituye problema de aprendizaje si se estudia en situaciones como la siguiente:

Al enumerar los números impares mayores que 3 y menores que 9, los elementos que pertenecen a este conjunto, son los que cumplen con ser: impares, mayores que tres y menores que nueve. Los números buscados son 5 y 7.

Si ahora buscamos los números impares compuestos, mayores que 3 y menores que 9, notamos que no hay ningún número que satisfaga todas las condiciones, esto es, hay cero elementos.

Actividad 2

a. Revise algunos libros de texto y analice los ejemplos dados de cero como cardinalidad del conjunto vacío.

b. Escriba tres ejemplos de conjuntos con cardinalidad cero.

c. Reúnase con algunos compañeros y comenten los ejemplos construidos por cada uno.

d. Enumere los elementos que pertenecen al conjunto de números naturales que satisfacen la ecuación:

$$3x + 2 = 1.$$

ACTIVIDADES PARA REALIZAR CON LOS ALUMNOS

El análisis realizado en la sección anterior, acerca de algunos ejemplos que tradicionalmente se han asociado con la noción de infinito, conduce a proponer categóricamente que tales ejemplos se excluyan de la enseñanza del tema.

Esta recomendación se basa en el hecho de que realmente no son infinitos y provocan la fijación de ideas que posteriormente dificultan o distorsionan otros aprendizajes.

La dificultad para evitar el uso de ejemplos como los analizados, se encuentra principalmente en aspectos como:

- Falta de ejemplos de conjuntos infinitos fuera del contexto matemático.
- Costumbre en su uso.

Si se analiza detenidamente, deberá aceptarse que el acercamiento a la noción de infinito no es fácil, debido al alto grado de abstracción y generalización que se requiere, y que obviamente los niños no han desarrollado en el nivel primario.

Más que actividades didácticas, nuestra propuesta se centra en el estudio de las características de los números naturales y de otros conjuntos equipotentes a ellos. En síntesis, proponemos que se presenten pocos ejemplos, pero que éstos sean correctos.

Entre los conjuntos numéricos que pueden estudiarse además de números pares, están:

- Números impares.
- Múltiplos de cualquier número.
- Fracciones equivalentes a 1/2, 1/3, etc.
- Series numéricas aritméticas y geométricas como las estudiadas en el capítulo dos.

Aunque en la escuela primaria se inicia el estudio de otro tipo de conjuntos, como los números reales, nuestra propuesta es que su conceptualización como conjuntos infinitos, se deje para el nivel medio.

En cuanto a la enseñanza del concepto de cero como cardinalidad del conjunto vacío, empezaremos analizando algunos ejemplos que frecuentemente se utilizan en las clases de matemática. Veamos algunos de ellos.

Cuántos elementos tiene cada conjunto formado por:

- Personas con ocho ojos.
- Jirafas voladoras.
- Triángulos cuadrados.

Es evidente que no existe ningún elemento que pertenezca a conjuntos como los descritos.

El problema está en que después de su estudio, pareciera que el cero está asociado con conjuntos que son descriptores de absurdos, contradicciones y aberraciones de la naturaleza.

Por estas razones, nuestra primera propuesta se refiere a analizar con profundidad y detenimiento los ejemplos que serán presentados a los niños.

Consideramos que el estudio de esta noción, es particularmente importante, porque su cardinalidad es el número cero, lo cual implica que desde el inicio se le conceptualice como número natural, facilitando la comprensión de propiedades de los números, derivadas de la posicionalidad del sistema decimal.

Actividad 1

a. Observe algunas características que no tengan sus alumnos pero que sean posibles: por ejemplo usar lentes, tener ojos azules, etc.

b. Solicite que se pongan de pie los niños que usen lentes. Evidencie que no hay ninguno, que esto equivale a decir que hay cero alumnos, y por lo tanto el conjunto queda vacío porque ninguno satisface su condición.

c. Enuncie algunas condiciones que ningún estudiante satisfaga.

Las conjunciones son muy efectivas para generar conjuntos vacíos, por ejemplo: requiera que pase al frente un alumno que sea delgado, tenga pelo negro y vista zapatos cafés. Las características deberán darse de manera que ninguno de los alumnos las cumpla.

Actividad 2

Materiales: juego de 24 figuras utilizada en actividad de capítulo 3.
Modalidad de trabajo: individual.

Procedimiento:

Indique a los niños que deberán seleccionar las figuras que satisfagan las condiciones que le señale. Es importante que no siempre les indique condiciones que definen conjuntos vacíos, ya que si no de antemano sabrán que no hay elementos.

a. Figuras de cuatro lados que no tengan ángulos rectos.

b. Figuras que no tengan cuatro lados y tengan ángulos rectos.

c. Triángulos rojos pequeños y grandes a la vez.

d. Círculos pequeños amarillos.

SUGERENCIAS DE TRABAJO

Aprendiendo Matemática

Identifique a los conjuntos que son infinitos, explicando en cada caso su respuesta:

a. Glóbulos rojos en el organismo de una persona.
b. Segundos que hay en un siglo.
c. Múltiplos de 5.
d. Divisores de 20.
e. Números naturales cuya diferencia es 3.

Para ponerse a pensar

a. Encuentre los números naturales que al dividirlos entre 3, el residuo es uno.
b. Ahora, encuentre los números naturales que al dividirlos entre 5, el residuo es uno.
c. Encuentre los números naturales que al dividirlos entre 3 y entre 5, el residuo es uno.

Para conocer como piensan los niños

Proponga a un grupo de niños de los grados intermedios la siguiente pregunta: hace siete horas era el doble de la hora que es ahora. ¿Qué hora es?

Observe y registre las estrategias que utilizan, las peguntas que hacen, etc.

Ordene sus observaciones y compártalas con algunos compañeros, para identificar diferencias y similitudes en sus experiencias.

Actividades didácticas

Pregunte a los niños cual es el número más grande que conocen, escríbalo en el pizarrón.
Pregunte que pasa si se le suma uno (haga la misma pregunta varias veces).
Requiera otro de los números dados por los alumnos.

¿Qué les pasa a los números cada vez que le suman 1?
¿Hasta cuando pueden seguir sumando 1?

No olvide registrar todas sus observaciones y comentarios.

Lecturas complementarias

a. Investigue la magnitud de las distancias entre galaxias.
b. Calcule aproximadamente hace cuántos segundos se extinguieron los dinosaurios.
c. ¿Qué puede decir de las cantidades anteriores.?

MICELÁNEA DE ACTIVIDADES PARA REALIZAR CON LOS NIÑOS

Como complemento presentamos algunas actividades misceláneas que pueden ser utilizadas en la enseñanza de distintos temas.

1. Cuál es la suma mayor que se puede hacer con 3 números diferentes de 2 cifras.

2. Adivine quién soy: soy un múltiplo de 4 y divisor de 32; soy mayor que 10 pero menor que 20.

3. En cada grupo descubra al intruso:

   a) 1/2, 1/8 , 1/3 , 1/9
   b) 5/5 , 5/6 , 6/6 , 4/4
   c) 6/1 , 8/1 , 3/1 , 1/2
   d) 7/3 , 4/5 , 3/2 , 9/7

4. Escriba dos fracciones más en cada grupo:

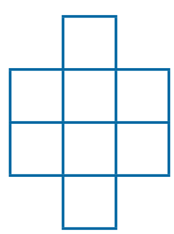
   a) 1/5 , 2/5 , 3/5 , 4/5
   b) 12/7 , 11/7 , 10/7 , 9/7
   c) 2/4 , 4/4 , 6/4 , 8/4
   d) 18/6 , 15/6 , 12/6 , 9/6

5. Las vacaciones comienzan mañana, hoy no es miércoles ni sábado. Mañana no será viernes ni lunes. Ayer no fue jueves ni domingo ¿ Qué día comienzan las vacaciones?

6. Quincesuma: juego en pareja.

   a) En una tira horizontal escriba los números del 1 al 9.
   b) Cada jugador posee tres objetos para marcar por turno, tres posiciones en la tira numerada.
   c) Gana el que primero logre sumar quince con los tres números ocupados.
   d) Si los dos jugadores colocan sus tres objetos y ninguno ha sumado quince, al que le toca tirar debe mover cualquiera de los tres a una posición vacía, hasta cuando alguien gane.

7. Encuentre todas las formas de colocar en el siguiente arreglo, los números del 1 al 8, de manera que no queden dos números seguidos en dos casillas consecutivas en forma horizontal, vertical o diagonal.



8. El cometa Halley visita la Tierra cada 76 años. ¿Cada cuántos siglos coincidirá su aparición con el cambio de siglo?

9. Teniendo como numerador la medida en cm de su altura, determine la razón entre esta medida y:

   a) Su brazada
   b) La altura de su ombligo.
   c) La longitud de la pierna
   d) La longitud de su cuarta.
   e) Su perímetro craneano.

10. El sobresaliente creador de acertijos, el inglés Henry Dudeney, presentó un cuadro mágico 3 X 3, con constante mágica 111 y en el cual, todos los números son primos con excepción de uno.

Complete ese cuadrado mágico

73		
31	13	

¿Cuál es el número que no es primo?

10. El cuadrado mágico 3 X 3 con la menor constante mágica que solamente posee números primos es el formado por los números:

    5, 17, 29, 47, 59, 71, 89, 101, 113

¡Constrúyalo y determine cuál es la constante mágica!

11. Se ha construído un cuadrado mágico con los números 1 hasta 16.

Reconstruir el cuadrado mágico si se sabe que:

a) Los dos últimos números de la cuarta fila son primos.
b) En cada fila se cumple que la suma de los dos números del centro es igual a 17 y uno de los sumandos en cada suma es primo.
c) Los números de la segunda fila van en orden descendente, de izquierda a derecha, y dos de ellos son consecutivos y además primos.
d) El tercer número de la primera fila es la mitad del tercer número de la tercera fila.

12. Los siguientes cinco números son primos y la diferencia entre cada par de números primos es la misma:

    AA, BA, CA, ADA, AEA

¿De cuáles primos se trata?

13. Los siguientes cinco números son primos y la diferencia entre cada par de números es la misma:

    AB, CB, DB, EFB, EGB

    Los dígitos C y B son consecutivos: ¿de cuáles primos se trata?

JUEGO DE RAZONAMIENTO DEDUCTIVO

Modalidad: parejas.
Instrucciones: cada jugador dibuja una tabla con 6 columnas y de 10 a 15 filas.

Turno	# 1	# 2	#3	pica	centro

Este juego es llamado Pica-Centro3, es un juego para dos jugadores (o dos grupos) en el cual uno de los jugadores usando el razonamiento deductivo (obtiene conclusiones de información dada) para determinar los dígitos de un número seleccionado por el otro jugador.

El juego empieza cuando el jugador A escoge un número de tres dígitos que no contenga ceros y lo escribe en un papel, sin que el jugador B pueda verlo. El jugador B trata de determinar el número que anotó el jugador A, haciendo propuestas sucesivas. El primer intento del jugador B es al azar, (adivinando), pero luego usando el razonamiento deductivo, basándose en la información proporcionada por el otro jugador.

Para ilustrar el procedimiento siga este ejemplo:

a. Supongamos que el jugador A escoge el número 694 . Lo anota sin que B lo vea.
b. El primer número que el jugador B propone es 157 y lo anota en su tabla.
c. El jugador A le dará la siguiente información 0 pica y 0 centro.

Turno	# 1	# 2	#3	pica	centro
1	1	5	7	0	0

Lo cual debe interpretarse de la siguiente forma:
Un pica es cuando un dígito es correcto pero no está colocado en la posición correcta.
Un centro es cuando un dígito es correcto y además está en la posición correcta.

¿Qué hace B con esa información?
Deduce que ninguno de los dígitos del número propuesto es parte del número buscado y entonces propone otro número de tres dígitos. (Se espera que elimine los tres dígitos anteriores)

d. Supongamos que el segundo número propuesto por B es el 439. Lo anota en la tabla.
e. El jugador A dirá entonces 2 pica 0 centro. B Anota esta información en la tabla.

Turno	# 1	# 2	#3	pica	centro
1	1	5	7	0	0
2	4	3	9	2	0

f. El posible tercer intento lógico del jugador B está entre los siguientes números: 943, 349, 934, 394 y 943. Explique por qué.
g. Supongamos que escoge 934 y lo anota en su tabla.
h A dice un pica un centro. B anota esta información en su tabla.

Turno	# 1	# 2	#3	pica	centro
1	1	5	7	0	0
2	4	3	9	2	0
3	9	3	4	1	1

¿Cómo puede B aprovechar esta información?
¿Puede B concluir que 3 no es uno de los dígitos?
i. Con esta información explique como terminar el juego.
j. Los jugadores intercambian los papeles y gana el que logre determinar el número del oponente en la menor cantidad de intentos.

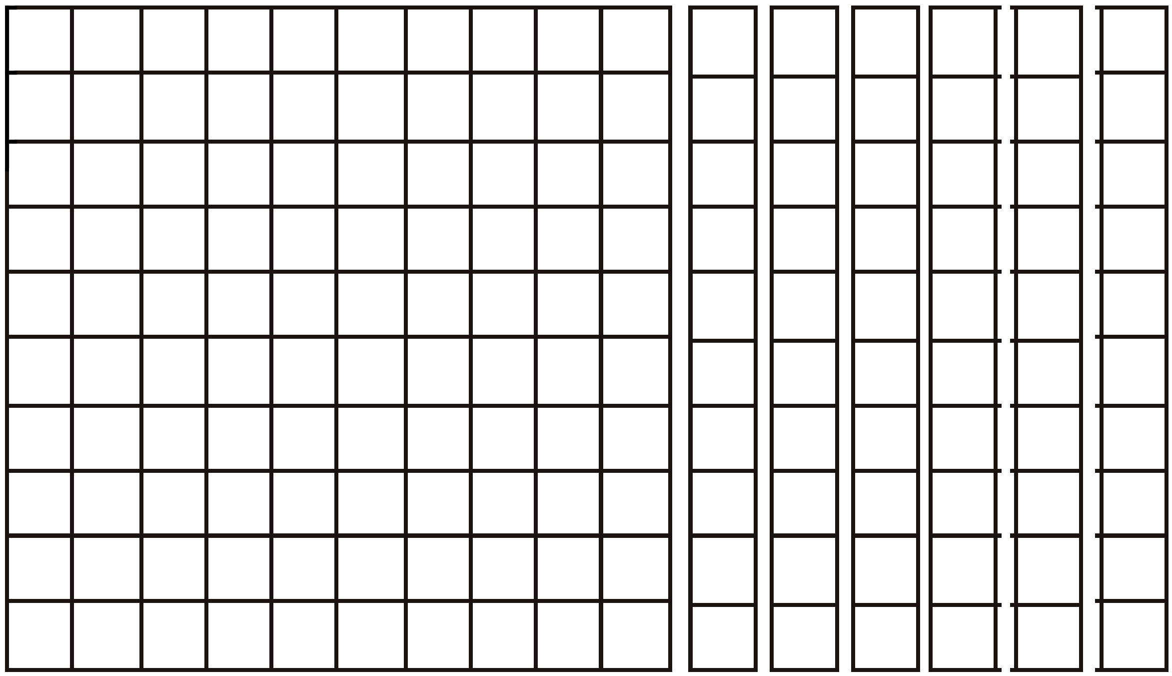
Bibliografía.

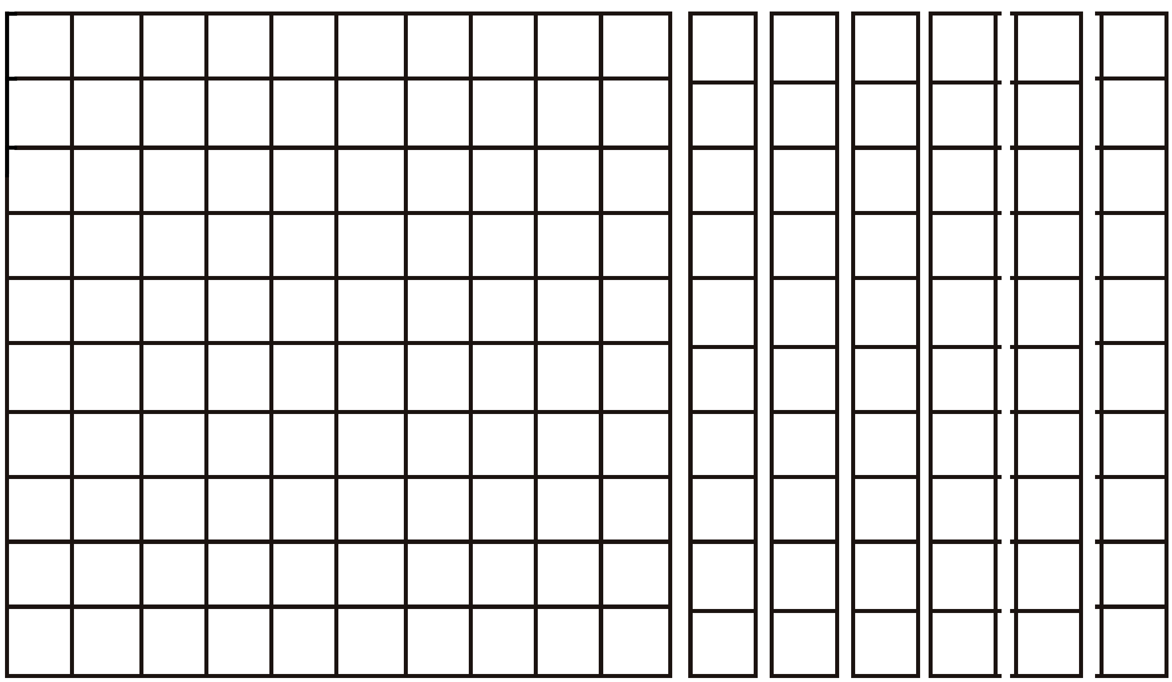
1. Acevedo, M. (1998). **Una Mirada a la Aritmética en la Escuela**. Bogotá: Asociación Colombiana de Matemática Educativa.
2. Artigue, M. (1998). **Ingeniería Didáctica en Educación Matemática**. México: Grupo Editorial Iberoamérica,
3. Belcredi. L & Zambra, M. Gauss, (1999, **Matemática para el ciclo básico**. Vols. 1,2,3. Montevideo: La Flor del Itapebé
4. Blanco, L. (1996). Colección Mathema. **Aprender a enseñar matemática: el proceso de llegar a ser un profesor de primaria.** Comares, España: Diada Editores.
5. Bourbaki, N. (1990). **Elèments de mathematique**. Paris .
6. Bonilla, M.(1997). **Cómo enseñamos aritmética**. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco de Caldas.
7. Campistrous, L.(1999). **Aprendiendo a resolver problemas**. Cuba: Editorial Pueblo y Educación.
8. Dickson, A. (1993). **El aprendizaje de las matemáticas**. Madrid: Editorial Labor.
9. García, G. (1999). **Una perspectiva social y cultural de la educación Matemática**. Bogotá: Asociación Colombiana de Matemática Educativa.
10. González, F. (1994). **La enseñanza de matemática con enfoque de laboratorio**. Venezuela: Impre UPL.
11. González, F. (1995). **El corazón de la Matemática**. Venezuela: Impre UPL.
12. Gutiérrez, F. (1996) Mediación Pedagógica. Guatemala: IIME. USAC.
13. Gutiérrez, F. (1996) **El Texto Paralelo**. Guatemala: IIME. USAC.
14. Negro, A.; Martínez I. Thio, P. (1999) **Enciclopedia de matemática básica, Números y problemas** . Vol. IX, España: Editorial Alhambra.
15. Moisés, L. (l999) **Aplicaoes de Vigotsky a educacao matemática**. Brasil: Papirus Editora.
16. Secretaría de Educación Pública. (1995). **Fichero de actividades didácticas**. México: Autor.

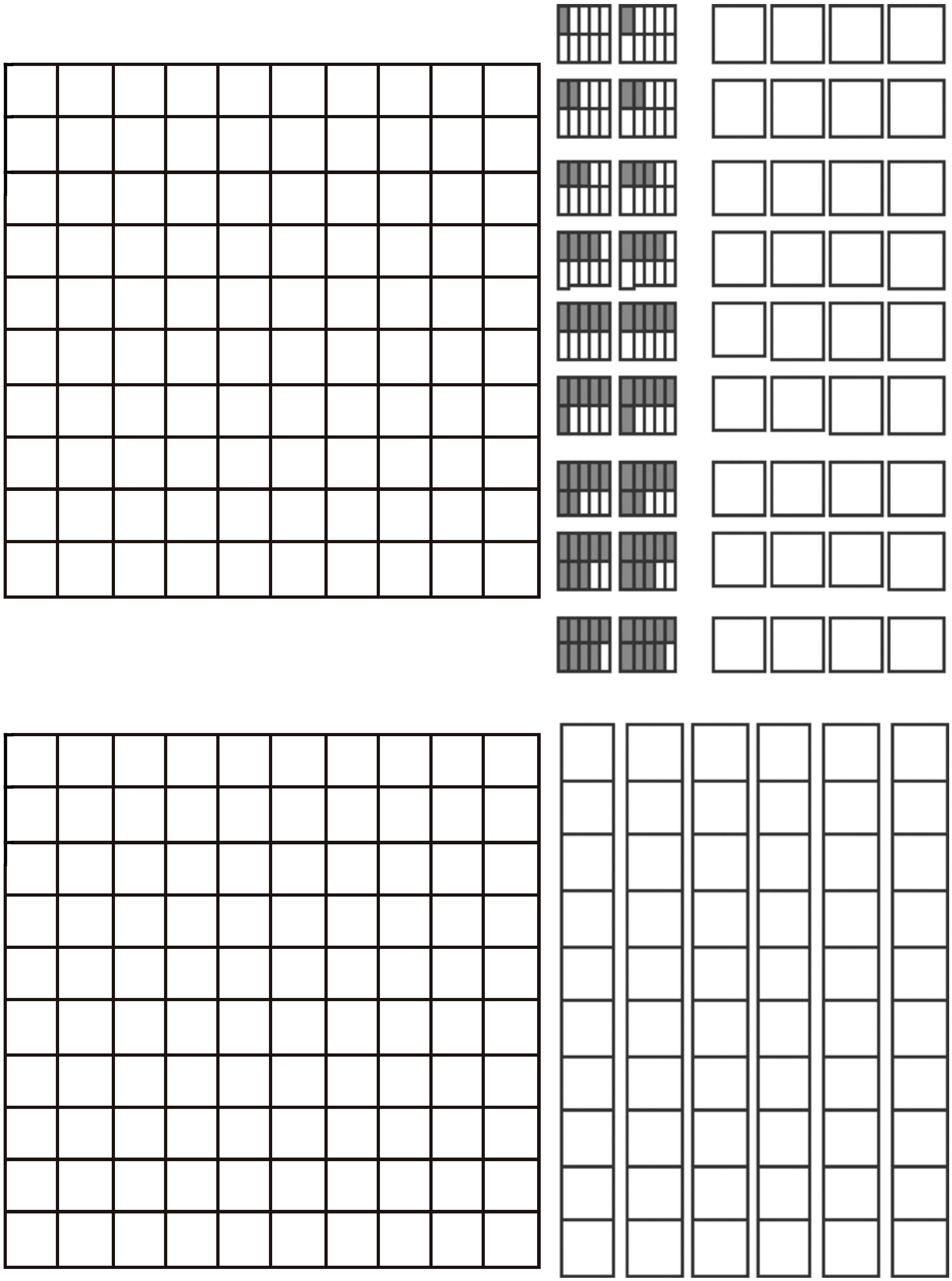
17 Randall, Ch. et al. (1999) **Matemáticas: edición para el maestro**. USA : Adison Wesley.

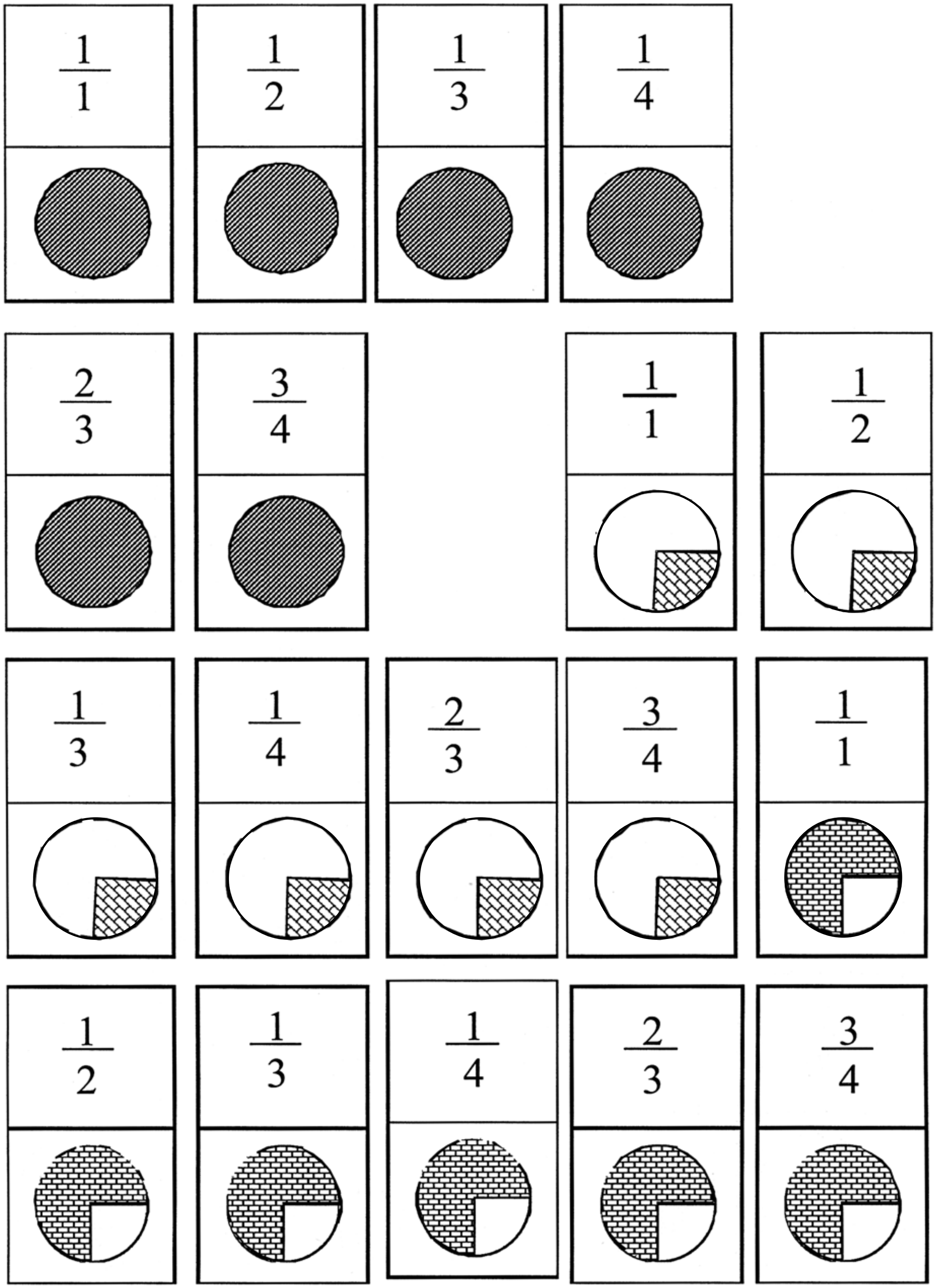
18. Ruiz, L. (1997). **El saber en el espacio didáctico**. España: Editorial de la Universidad de Jaén.
19. Masson Stewart. J. et al (2001). **Precálculo, matemática para el cálculo**. México: Thomson editores.
20. Vergnaud, G. (1995) **El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de la matemática en la escuela primaria**. México: Editorial Trillas.
21. Villela, J. ; Crespo C. & Ponteville, Ch.(1994) **Cuando la geometría es el tema de reflexión matemática**. Buenos Aires : Universidad Nacional de General San Martín

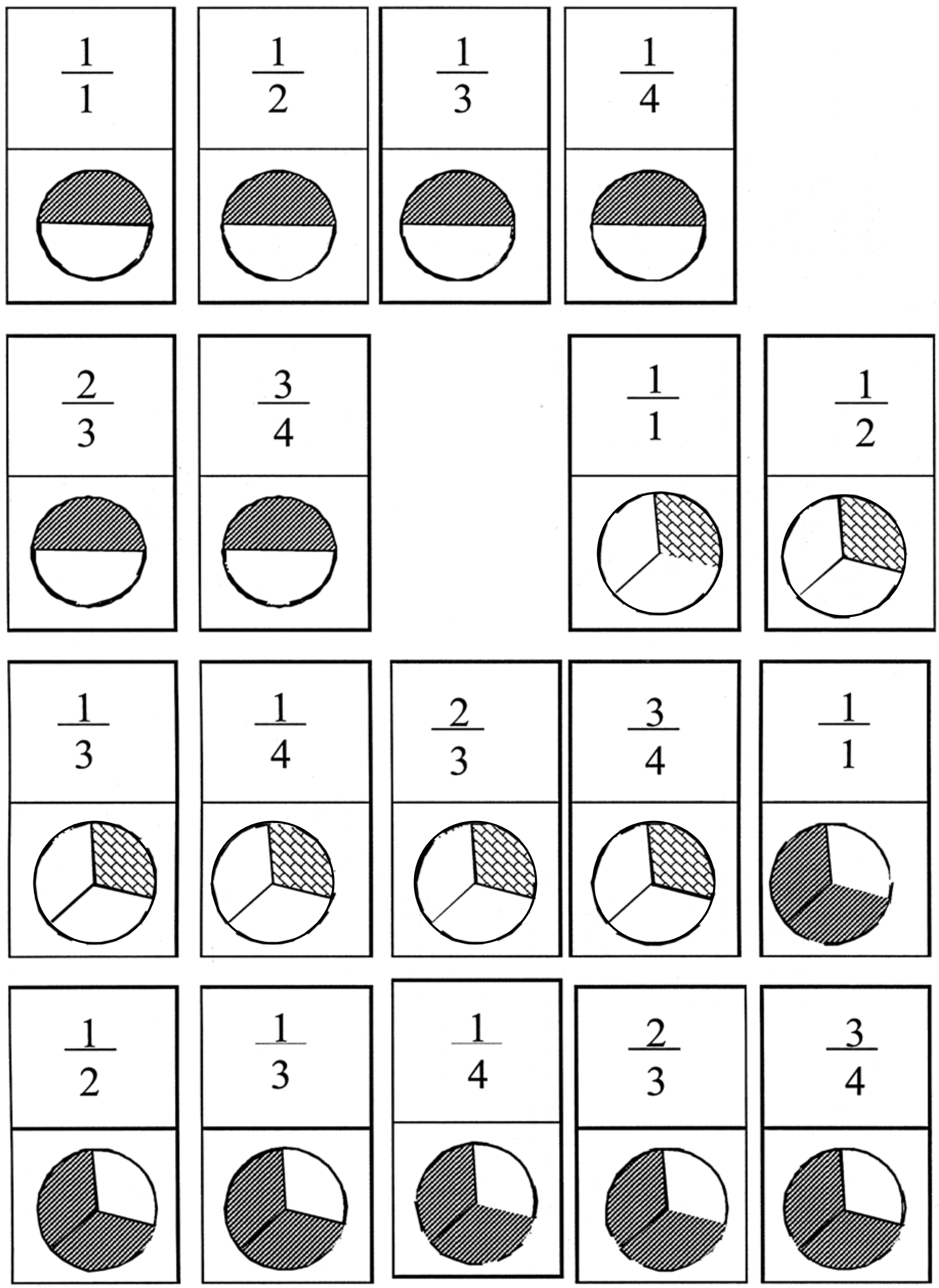
ANEXOS

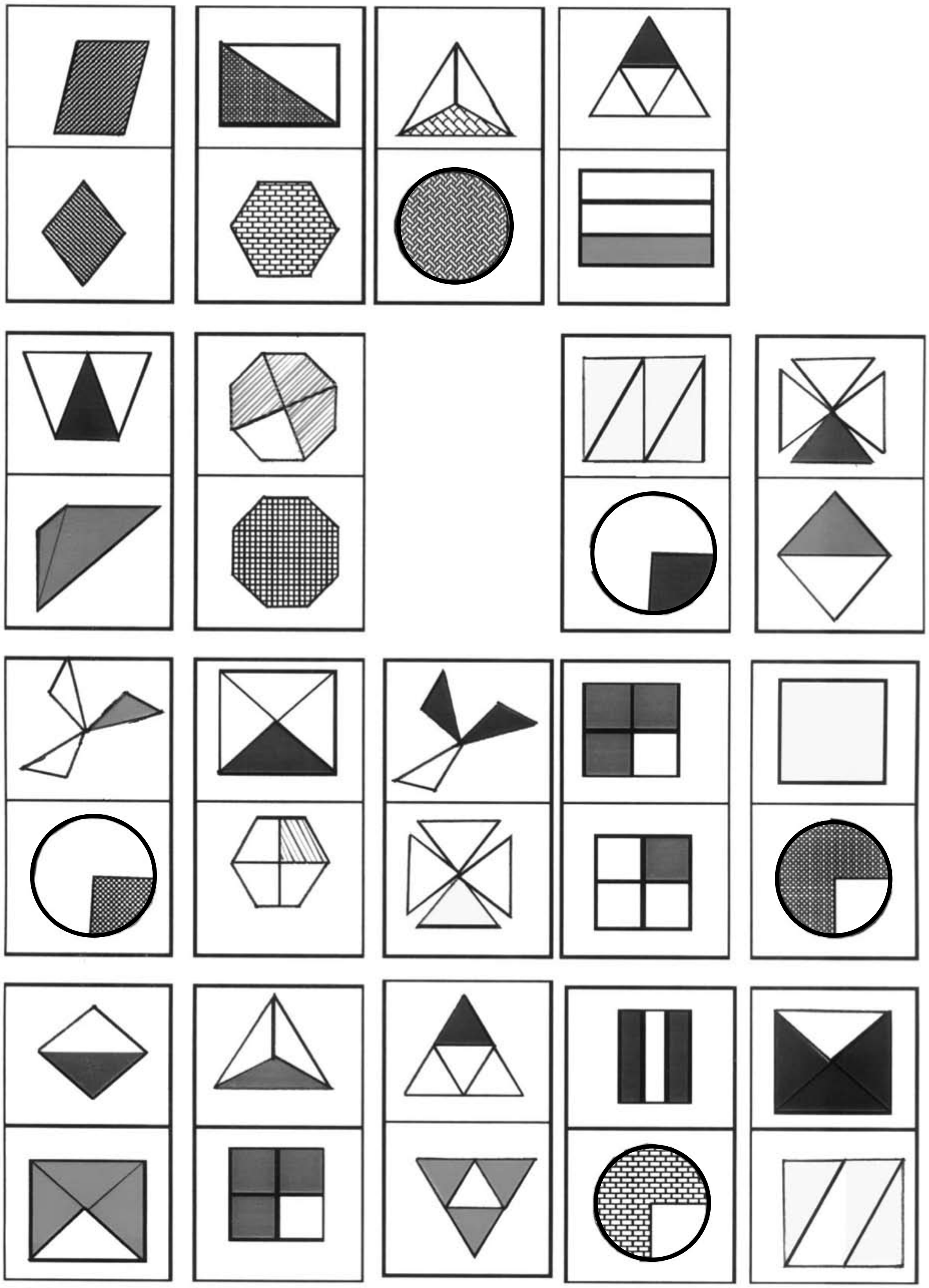


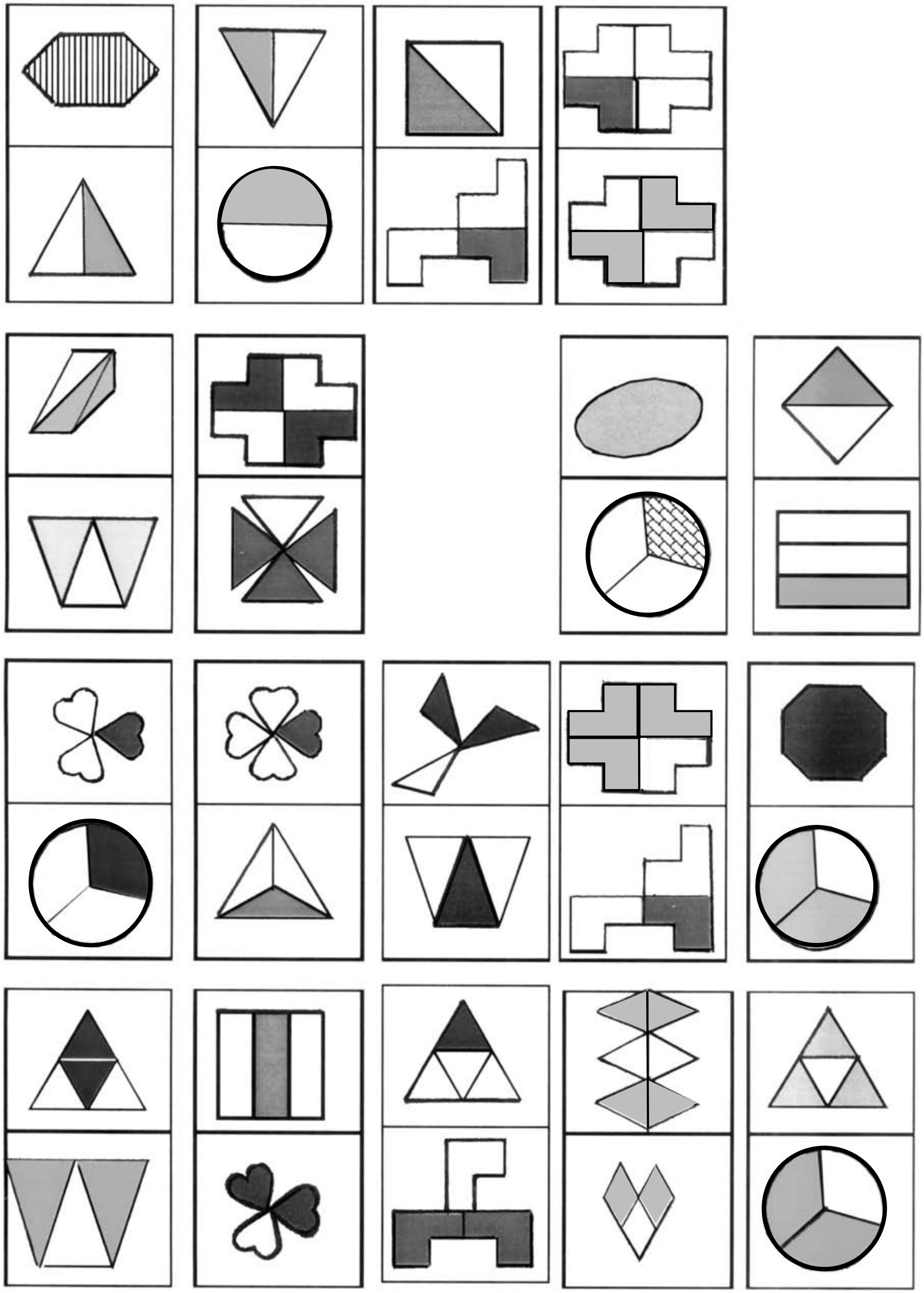





1/1
1/2
1/3
1/4
2/3
3/4
1/1
1/2
1/3
1/4
2/3
3/4
1/1
1/2
1/3
1/4
2/3
3/4


1/1
1/2
1/3
1/4
2/3
3/4
1/1
1/2
1/3
1/4
2/3
3/4
1/1
1/2
1/3
1/4
2/3
3/4





Este libro se terminó de imprimir
en el mes de junio del 2009
en los talleres gráficos de
EDITORAMA S.A.
Tel.: (506) 2255-0202
San José, Costa Rica

Nº 19,999