Matemáticas y su Didáctica para Maestros

Manual para el Estudiante

Edición Febrero 2003

Proyecto *Edumat-Maestros*

Director: Juan D. Godino

http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

FUNDAMENTOS DE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS PARA MAESTROS

Juan D. Godino

Carmen Batanero

Vicenç Font

Proyecto *Edumat-Maestros*
Director: Juan D. Godino
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA PARA MAESTROS

Dirección: Juan D. Godino

MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA PARA
MAESTROS

Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada
18071 Granada

ISBN:
Depósito Legal:

Impresión: ReproDigital. C/ Baza, 6.
La Mediana. Polígono Juncaril. Albolote.
18220-Granada.

Distribución en Internet:
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Publicación realizada en el marco del
Proyecto de Investigación y Desarrollo del
Ministerio de Ciencia y Tecnología,
BSO2002-02452.

Índice general

Proyecto *Edumat-Maestros*
Director: Juan D. Godino
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

FUNDAMENTOS DE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICA PARA MAESTROS

Juan D. Godino

Carmen Batanero

Vicenç Font

FUNDAMENTOS DE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS PARA MAESTROS

Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada
18071 Granada

ISBN: 84-932510-6-2
Depósito Legal: GR- 138-2003

Impresión: ReproDigital. Facultad de Ciencias
Avda. Fuentenueva s/n. 18071 Granada.

Distribución en Internet:
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Publicación realizada en el marco del Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología, BSO2002-02452.

Índice

CAPÍTULO 2:
ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Página

CAPÍTULO 3:
CURRÍCULO MATEMÁTICO PARA LA EDUCACIÓN PRIMARIA

CAPÍTULO 4:
RECURSOS PARA EL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS

Página

INTRODUCCIÓN

En esta Monografía sobre "*Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*" nos proponemos ofrecer una visión general de la educación matemática. Tratamos de crear un espacio de reflexión y estudio sobre las matemáticas, en cuanto objeto de enseñanza y aprendizaje, y sobre los instrumentos conceptuales y metodológicos de índole general que la Didáctica de las Matemáticas está generando como campo de investigación.

Deseamos que los maestros en formación adquieran una visión de la enseñanza de las matemáticas que contemple:[1]

- Las clases como comunidades matemáticas, y no como una simple colección de individuos.
- La verificación lógica y matemática de los resultados, frente a la visión del profesor como única fuente de respuestas correctas.
- El razonamiento matemático, más que los procedimientos de simple memorización.
- La formulación de conjeturas, la invención y la resolución de problemas, descartando el énfasis en la búsqueda mecánica de respuestas.
- La conexión de las ideas matemáticas y sus aplicaciones, frente a la visión de las matemáticas como un cuerpo aislado de conceptos y procedimientos.

Los siguientes principios de la enseñanza de las matemáticas descritos en los Principios y Estándares 2000 del NCTM[2] orientan el contenido de la Monografía:

1. *Equidad*. La excelencia en la educación matemática requiere equidad – unas altas expectativas y fuerte apoyo para todos los estudiantes.
2. *Currículo*. Un currículo es más que una colección de actividades: debe ser coherente, centrado en unas matemáticas importantes y bien articuladas a lo largo de los distintos niveles.

---

[1] NCTM (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
[2] NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston. VA: National Council of Teachers of Mathematics.

3. *Enseñanza*. Una enseñanza efectiva de las matemáticas requiere comprensión de lo que los estudiantes conocen y necesitan aprender, y por tanto les desafían y apoyan para aprenderlas bien.
4. *Aprendizaje*. Los estudiantes deben aprender matemáticas comprendiéndolas, construyendo activamente el nuevo conocimiento a partir de la experiencia y el conocimiento previo.
5. *Evaluación*. La evaluación debe apoyar el aprendizaje de unas matemáticas importantes y proporcionar información útil tanto a los profesores como a los estudiantes.
6. *Tecnología*. La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y estimula el aprendizaje de los estudiantes.

Estos seis principios describen cuestiones cruciales que, aunque no sean específicas de las matemáticas escolares, están profundamente interconectadas con los programas de matemáticas. Deben ser tenidos en cuenta en el desarrollo de propuestas curriculares, la selección de materiales, la planificación de unidades didácticas, el diseño de evaluaciones, las decisiones instruccionales en las clases, y el establecimiento de programas de apoyo para el desarrollo profesional de los profesores.

El primer capítulo está centrado en el análisis del propio contenido matemático, con la finalidad de hacer reflexionar a los maestros en formación sobre sus propias creencias y actitudes hacia las matemáticas e inducir en ellos una visión constructiva y sociocultural de las mismas. Tras presentar una síntesis del papel que las matemáticas desempeñan en la ciencia, la tecnología y en la vida cotidiana describimos algunos rasgos característicos de las matemáticas, tomando como referencia las orientaciones del currículo básico de matemáticas propuesto por el MEC. Destacamos el carácter evolutivo del conocimiento matemático, el papel de la resolución de problemas y la modelización, el razonamiento, lenguaje y comunicación, la estructura lógica y naturaleza relacional de las matemáticas, así como la dialéctica entre exactitud y aproximación. En este capítulo también describimos las tres categorías básicas de contenidos que propone el Diseño Curricular Básico (conceptos, procedimientos y actitudes), y razonamos que el análisis de la actividad matemática y de los procesos de enseñanza y aprendizaje en las clases requiere adoptar un modelo epistemológico más detallado, considerando como objetos matemáticos las propias situaciones - problemas, el lenguaje, las propiedades y argumentaciones, además de los conceptos y procedimientos. Junto a estos objetos matemáticos es necesario tener en cuenta en la organización de la enseñanza los *procesos matemáticos* de resolución de problemas, representación, comunicación, justificación, conexiones e institucionalización.

El segundo capítulo lo dedicamos al estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, comenzando con una situación de contextualización sobre las creencias de los maestros en formación acerca de la enseñanza y el aprendizaje de nuestra materia. Hemos considerado necesario iniciar el tema con un breve análisis de las nociones de competencia y comprensión matemática, esto es, sobre lo que vamos a considerar como "conocer matemáticas" desde el punto de vista del sujeto que aprende. No parece posible tomar decisiones educativas apropiadas si no adoptamos previamente criterios claros sobre lo que vamos a considerar qué es "saber matemáticas".

Sin privar de importancia a los enfoques constructivistas en el estudio de las matemáticas consideramos necesario reconocer explícitamente el papel crucial del profesor en la organización, dirección y promoción de los aprendizajes de los estudiantes. Una instrucción matemática significativa debe atribuir un papel clave a la interacción social, a la cooperación, al discurso del profesor, a la comunicación, además de a la interacción del sujeto con las situaciones-problemas. El maestro en formación debe ser consciente de la complejidad de la tarea de la enseñanza si se desea lograr un aprendizaje matemático significativo. Será necesario diseñar y gestionar una variedad de tipos de situaciones didácticas, implementar una variedad de patrones de interacción y tener en cuenta las normas, con frecuencia implícitas, que regulan y condicionan la enseñanza y los aprendizajes. Finalizamos el desarrollo de los conocimientos del capítulo 2 con información sobre los tipos de dificultades, errores y obstáculos en el estudio de las matemáticas y una síntesis de los "Estándares para la enseñanza de las matemáticas", elaborados por la prestigiosa sociedad NCTM de profesores de matemáticas de EE.UU.

El tercer capítulo está dedicado al estudio del currículo de matemáticas, al nivel de propuestas curriculares básicas y de programación de unidades didácticas. Presentamos una síntesis de las orientaciones curriculares del MEC para el área de matemáticas, incluyendo los fines y objetivos, contenidos y evaluación, así como las principales características de los Principios y Estándares para las matemáticas escolares del NCTM. Esta información aportará a los maestros en formación una visión complementaria y crítica, tanto de las orientaciones propuestas a nivel del estado español como de las respectivas comunidades autonómicas. Respecto del diseño y gestión de unidades didácticas describimos los principales elementos a tener en cuenta en la planificación, gestión y evaluación de las unidades, así como las correspondientes adaptaciones curriculares para alumnos con necesidades específicas.

El último capítulo incluido en la Monografía lo dedicamos al estudio de los recursos didácticos utilizables en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Presentamos una perspectiva general de los recursos, incluyendo desde los libros de texto, materiales manipulativos, gráficos y textuales, hasta los recursos tecnológicos (calculadoras, ordenadores, internet, etc.). El maestro en formación debe lograr una actitud propicia al uso de materiales manipulativos de toda índole, incardinados como elementos de las situaciones didácticas, pero al mismo tiempo es necesario que construya una actitud crítica al uso indiscriminado de tales recursos. Razonamos que el material manipulativo (sea tangible o gráfico-textual) puede ser un puente entre la realidad y los objetos matemáticos, pero es necesario adoptar precauciones para no caer en un empirismo ciego ni en un formalismo estéril.

En cuanto a las referencias bibliográficas hemos adoptado el criterio de incluir a pié de página las principales fuentes documentales que hemos utilizado de manera directa. Al final de cada capítulo hemos añadido alguna bibliografía que consideramos de interés como complemento y que son accesibles para el maestro en formación.

Cada capítulo ha sido estructurado en tres secciones. En la primera sección, que denominamos *Contextualización*, proponemos una situación inicial de reflexión y discusión colectiva sobre un aspecto del tema, En la segunda, *Desarrollo de conocimientos*, presentamos las principales posiciones e informaciones, así como una colección de actividades o tareas intercaladas en el texto que pueden servir como situaciones introductorias a los distintos apartados, o bien como complemento y evaluación del estudio. La tercera sección, *Seminario didáctico*, incluye una colección de "problemas de didáctica de las matemáticas" que amplían la reflexión y el análisis de los conocimientos propuestos en cada tema.

Esperamos que este texto, que hemos intentado que sea a la vez riguroso y de lectura asequible, pueda servir a los futuros maestros para aumentar su interés por las matemáticas y su enseñanza

Los autores

Proyecto *Edumat-Maestros*
Director: Juan D. Godino
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Capítulo 1

PERSPECTIVA EDUCATIVA DE LAS MATEMÁTICAS

A: Contextualización

REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN COLECTIVA SOBRE LAS PROPIAS CREENCIAS HACIA LAS MATEMÁTICAS

Consigna:

A continuación se presentan algunos enunciados que reflejan diferentes modos de pensar sobre las matemáticas, el conocimiento matemático y la habilidad para hacer matemáticas.

1) Completa el cuestionario, leyendo con atención los enunciados e indicando el grado de acuerdo con cada uno de ellos, mediante un valor numérico, siguiendo el convenio presentado.
2) Si no estás de acuerdo con alguno de los enunciados, indica tus razones.

Cuestionario[1]

Indica tu grado de acuerdo con cada enunciado, según el siguiente convenio: 1: Totalmente en desacuerdo; 2: En desacuerdo; 3: Neutral (ni de acuerdo ni en desacuerdo); 4: De acuerdo; 5: Totalmente de acuerdo:

1. Las matemáticas son esencialmente un conjunto de conocimientos (hechos, reglas, fórmulas y procedimientos socialmente útiles).

   1 2 3 4 5

2. Las matemáticas son esencialmente una manera de pensar y resolver problemas.

   1 2 3 4 5

3. Se supone que las matemáticas no tienen que tener significado.

   1 2 3 4 5

4. Las matemáticas implican principalmente memorización y seguimiento de reglas.

   1 2 3 4 5

5. La eficacia o dominio de las matemáticas se caracteriza por una habilidad en conocer hechos aritméticos o de hacer cálculos rápidamente.

   1 2 3 4 5

6. El conocimiento matemático esencialmente es fijo e inmutable.

[1] Baroody, A. J. y Coslick, R. T. (1998). Fostering children's mathematical power. An investigative approach to K-8 mathematics instruction..London: Lawrence Erlbaum Ass. (p. 1-8)

1 2 3 4 5

7. Las matemáticas están siempre bien definidas; no están abiertas a cuestionamientos, argumentos o interpretaciones personales.

1 2 3 4 5

8. La habilidad matemática es esencialmente algo con lo que se nace o no se nace.

1 2 3 4 5

7. Los matemáticos trabajan típicamente aislados unos de otros.

1 2 3 4 5

B: Desarrollo de conocimientos

1. ALGUNAS CONCEPCIONES SOBRE LAS MATEMÁTICAS

En la reflexión sobre las propias concepciones hacia las matemáticas habrán surgido diversas opiniones y creencias sobre las matemáticas, la actividad matemática y la capacidad para aprender matemáticas. Pudiera parecer que esta discusión está muy alejada de los intereses prácticos del profesor, interesado fundamentalmente por cómo hacer más efectiva la enseñanza de las matemáticas (u otro tema) a sus alumnos. La preocupación sobre qué es un cierto conocimiento, forma parte de la *epistemología o teoría del conocimiento*, una de las ramas de la filosofía.

Sin embargo, las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas son un factor que condiciona la actuación de los profesores en la clase, como razonamos a continuación.

- Supongamos, por ejemplo, que un profesor cree que los objetos matemáticos tienen una existencia propia (incluso aunque esta "existencia" sea no material). Para él, objetos tales como "triángulo", "suma", "fracciones", "probabilidad", existen, tal como lo hacen los elefantes o los planetas. En este caso, sólo tenemos que ayudar a los niños a "descubrirlos", ya que son independientes de las personas que los usan y de los problemas a los que se aplican, e incluso de la cultura.

  Para este profesor, la mejor forma de enseñar matemáticas sería la presentación de estos objetos, del mismo modo que la mejor forma de hacer que un niño comprenda qué es un elefante es llevarlo al zoológico, o mostrarle un vídeo sobre la vida de los elefantes.

  ¿Cómo podemos mostrar lo que es un círculo u otro objeto matemático? La mejor forma sería enseñar sus definiciones y propiedades, esto es lo que este profesor consideraría "saber matemáticas". Las aplicaciones de los conceptos o la resolución de problemas matemáticos serían secundarios para este profesor. Éstas se tratarían después de que el alumno hubiera aprendido las matemáticas.

> 1. Para los siguientes objetos matemáticos, razona si su existencia es o no independiente de la cultura: a) sistema de numeración; b) unidades de medida; c) notación algebraica.

- Otros profesores consideran las matemáticas como un resultado del ingenio y la actividad humana (como algo construido), al igual que la música, o la literatura. Para ellos, las matemáticas se han inventado, como consecuencia de la curiosidad del hombre y su necesidad de resolver una amplia variedad de problemas, como, por ejemplo, intercambio de objetos en el comercio, construcción, ingeniería, astronomía, etc.

  Para estos profesores, el carácter más o menos fijo que hoy día –o en una etapa histórica anterior- tienen los objetos matemáticos, es debido a un proceso de negociación social. Las personas que han creado estos objetos han debido ponerse de acuerdo en cuanto a sus reglas de funcionamiento, de modo que cada nuevo objeto forma un todo coherente con los anteriores.

Por otro lado, la historia de las matemáticas muestra que las definiciones, propiedades y teoremas enunciados por matemáticos famosos también son falibles y están sujetos a evolución. De manera análoga, el aprendizaje y la enseñanza deben tener en cuenta que es natural que los alumnos tengan dificultades y cometan errores en su proceso de aprendizaje y que se puede aprender de los propios errores. Esta es la posición de las teorías psicológicas constructivistas sobre el aprendizaje de las matemáticas, las cuales se basan a su vez en la visión filosófica sobre las matemáticas conocida como *constructivismo social*.

2. Busca algún episodio de historia de las matemáticas en que se muestre cómo un concepto ha evolucionado.

1.1. Concepción idealista-platónica

Entre la gran variedad de creencias sobre las relaciones entre las matemáticas y sus aplicaciones y sobre el papel de éstas en la enseñanza y el aprendizaje, podemos identificar dos concepciones extremas.

Una de estas concepciones, que fue común entre muchos matemáticos profesionales hasta hace unos años, considera que el alumno debe adquirir primero las estructuras fundamentales de las matemáticas de forma axiomática. Se supone que una vez adquirida esta base, será fácil que el alumno por sí solo pueda resolver las aplicaciones y problemas que se le presenten.

Según esta visión no se puede ser capaz de aplicar las matemáticas, salvo en casos muy triviales, si no se cuenta con un buen fundamento matemático. La matemática pura y la aplicada serían dos disciplinas distintas; y las estructuras matemáticas abstractas deben preceder a sus aplicaciones en la Naturaleza y Sociedad. Las aplicaciones de las matemáticas serían un "apéndice" en el estudio de las matemáticas, de modo que no se producirían ningún perjuicio si este apéndice no es tenido en cuenta por el estudiante. Las personas que tienen esta creencia piensan que las matemáticas son una disciplina autónoma. Podríamos desarrollar las matemáticas sin tener en cuenta sus aplicaciones a otras ciencias, tan solo en base a problemas internos a las matemáticas.

Esta concepción de las matemáticas se designa como "idealista-platónica". Con esta concepción es sencillo construir un currículo, puesto que no hay que preocuparse por las aplicaciones en otras áreas. Estas aplicaciones se “filtrarían”, abstrayendo los conceptos, propiedades y teoremas matemáticos, para constituir un dominio matemático “puro”.

3. Consulta algunos libros de texto destinados a estudiantes de secundaria o de primeros cursos de Universidad y escritos en los años 70 y 80. Compara con algunos libros recientes destinados a los mismos alumnos. ¿Puedes identificar si la concepción del autor del texto sobre las matemáticas es de tipo platónico? ¿Cómo lo deduces?

1.2. Concepción constructivista

Otros matemáticos y profesores de matemáticas consideran que debe haber una estrecha relación entre las matemáticas y sus aplicaciones a lo largo de todo el currículo. Piensan que es importante mostrar a los alumnos la necesidad de cada parte de las matemáticas antes de que les sea presentada. Los alumnos deberían ser capaces de ver cómo cada parte de las matemáticas satisfacen una cierta necesidad.

Ejemplo:

> Poniendo a los niños en situaciones de intercambio les creamos la necesidad de *comparar, contar y ordenar* colecciones de objetos. Gradualmente se introducen los números naturales para atender esta necesidad

En esta visión, las aplicaciones, tanto externas como internas, deberían preceder y seguir a la creación de las matemáticas; éstas deben aparecer como una respuesta natural y espontánea de la mente y el genio humano a los problemas que se presentan en el entorno físico, biológico y social en que el hombre vive. Los estudiantes deben ver, por sí mismos, que la axiomatización, la generalización y la abstracción de las matemáticas son necesarias con el fin de comprender los problemas de la naturaleza y la sociedad. A las personas partidarias de esta visión de las matemáticas y su enseñanza les gustaría poder comenzar con algunos problemas de la naturaleza y la sociedad y construir las estructuras fundamentales de las matemáticas a partir de ellas. De este modo se presentaría a los alumnos la estrecha relación entre las matemáticas y sus aplicaciones.

La elaboración de un currículo de acuerdo con la concepción constructivista es compleja, porque, además de conocimientos matemáticos, requiere conocimientos sobre otros campos. Las estructuras de las ciencias físicas, biológicas, sociales son relativamente más complejas que las matemáticas y no siempre hay un isomorfismo con las estructuras puramente matemáticas. Hay una abundancia de material disperso sobre aplicaciones de las matemáticas en otras áreas, pero la tarea de selección, secuenciación e integración no es sencilla.

4. ¿Por qué son necesarios los conceptos de longitud y área? ¿Qué tipo de problemas resuelven? ¿Qué otros conceptos, operaciones y propiedades se les asocian?

2. MATEMÁTICAS Y SOCIEDAD

Cuando tenemos en cuenta el tipo de matemáticas que queremos enseñar y la forma de llevar a cabo esta enseñanza debemos reflexionar sobre dos fines importantes de esta enseñanza:

- Que los alumnos lleguen a comprender y a apreciar el papel de las matemáticas en la sociedad, incluyendo sus diferentes campos de aplicación y el modo en que las matemáticas han contribuido a su desarrollo.
- Que los alumnos lleguen a comprender y a valorar el método matemático, esto es, la clase de preguntas que un uso inteligente de las matemáticas permite responder, las formas básicas de razonamiento y del trabajo matemático, así como su potencia y limitaciones.

2.1. ¿Cómo surgen las matemáticas? Algunas notas históricas

La perspectiva histórica muestra claramente que las matemáticas son un conjunto de conocimientos en evolución continua y que en dicha evolución desempeña a menudo un papel de primer orden la necesidad de resolver determinados problemas prácticos (o internos a las propias matemáticas) y su interrelación con otros conocimientos.

Ejemplo:

Los orígenes de la estadística son muy antiguos, ya que se han encontrado pruebas de recogida de datos sobre población, bienes y producción en las civilizaciones china (aproximadamente 1000 años a. C.), sumeria y egipcia. Incluso en la Biblia, en el libro de *Números* aparecen referencias al recuento de los israelitas en edad de servicio militar. No olvidemos que precisamente fue un censo, según el Evangelio, lo que motivó el viaje de José y María a Belén. Los censos propiamente dichos eran ya una institución en el siglo IV a.C. en el imperio romano. Sin embargo, sólo muy recientemente la estadística ha adquirido la categoría de ciencia. En el siglo XVII surge la aritmética política, desde la escuela alemana de Conring. Posteriormente su discípulo Achenwall orienta su trabajo a la recogida y análisis de datos numéricos, con fines específicos y en base a los cuales se hacen estimaciones y conjeturas, es decir se observan ya los elementos básicos del método estadístico.

La estadística no es una excepción y, al igual que ella, otras ramas de las matemáticas se han desarrollado como respuesta a problemas de índole diversa:

- Muchos aspectos de la geometría responden en sus orígenes históricos, a la necesidad de resolver problemas de agricultura y de arquitectura.
- Los diferentes sistemas de numeración evolucionan paralelamente a la necesidad de buscar notaciones que permitan agilizar los cálculos aritméticos.
- La teoría de la probabilidad se desarrolla para resolver algunos de los problemas que plantean los juegos de azar.

Las matemáticas constituyen el armazón sobre el que se construyen los modelos científicos, toman parte en el proceso de modelización de la realidad, y en muchas ocasiones han servido como medio de validación de estos modelos. Por ejemplo, han sido cálculos matemáticos los que permitieron, mucho antes de que pudiesen ser observados, el descubrimiento de la existencia de los últimos planetas de nuestro sistema solar.

Sin embargo, la evolución de las matemáticas no sólo se ha producido por acumulación de conocimientos o de campos de aplicación. Los propios conceptos matemáticos han ido modificando su significado con el transcurso del tiempo, ampliándolo, precisándolo o revisándolo, adquiriendo relevancia o, por el contrario, siendo relegados a segundo plano.

Ejemplos

- El cálculo de probabilidades se ha transformado notablemente, una vez que se incorporaron conceptos de la teoría de conjuntos en la axiomática propuesta por Kolmogorov. Este nuevo enfoque permitió aplicar el análisis matemático a la probabilidad, con el consiguiente avance de la teoría y sus aplicaciones en el último siglo.
- El cálculo manual de logaritmos y funciones circulares (senos, cosenos, etc.) fue objeto de enseñanza durante muchos años y los escolares dedicaron muchas horas al aprendizaje de algoritmos relacionados con su uso. Hoy las calculadoras y ordenadores producen directamente los valores de estas funciones y el cálculo manual ha desaparecido. El mismo proceso parece seguir actualmente el cálculo de raíces cuadradas.

2.2. Papel de las matemáticas en la ciencia y tecnología

Las aplicaciones matemáticas tienen una fuerte presencia en nuestro entorno. Si queremos que el alumno valore su papel, es importante que los ejemplos y situaciones que mostramos en la clase hagan ver, de la forma más completa posible, el amplio campo de fenómenos que las matemáticas permiten organizar.

2.2.1. Nuestro mundo biológico

Dentro del campo biológico, puede hacerse notar al alumno que muchas de las características heredadas en el nacimiento no se pueden prever de antemano: sexo, color de pelo, peso al nacer, etc. Algunos rasgos como la estatura, número de pulsaciones por minuto, recuento de hematíes, etc., dependen incluso del momento en que son medidas. La probabilidad permite describir estas características.

En medicina se realizan estudios epidemiológicos de tipo estadístico. Es necesario cuantificar el estado de un paciente (temperatura, pulsaciones, etc.) y seguir su evolución, mediante tablas y gráficos, comparándola con los valores promedios en un sujeto sano. El modo en que se determina el recuento de glóbulos rojos a partir de una muestra de sangre es un ejemplo de situaciones basadas en el razonamiento proporcional, así como en la idea de muestreo.

Cuando se hacen predicciones sobre la evolución de la población mundial o sobre la posibilidad de extinción de las ballenas, se están usado modelos matemáticos de crecimiento de poblaciones, de igual forma que cuando se hacen estimaciones de la propagación de una cierta enfermedad o de la esperanza de vida de un individuo.

Las formas de la naturaleza nos ofrecen ejemplos de muchos conceptos geométricos, abstraídos con frecuencia de la observación de los mismos.

El crecimiento de los alumnos permite plantear actividades de medida y ayudar a los alumnos a diferenciar progresivamente las diferentes magnitudes y a estimar cantidades de las mismas: peso, longitud, etc.

2.2.2. El mundo físico

Además del contexto biológico del propio individuo, nos hallamos inmersos en un medio físico. Una necesidad de primer orden es la medida de magnitudes como la temperatura, la velocidad, etc. Por otra pare, las construcciones que nos rodean (edificios, carreteras, plazas, puentes) proporcionan la oportunidad de analizar formas geométricas; su desarrollo ha precisado de cálculos geométricos y estadísticos, uso de funciones y actividades de medición y estimación (longitudes, superficies, volúmenes, tiempos de transporte, de construcción, costes, etc.)

¿Qué mejor fuente de ejemplos sobre fenómenos aleatorios que los meteorológicos?. La duración, intensidad, extensión de las lluvias, tormentas o granizos; las temperaturas máximas y mínimas, la intensidad y dirección del viento son variables aleatorias. También lo son las posibles consecuencias de estos fenómenos: el volumen de agua en un pantano, la magnitud de daños de una riada o granizo son ejemplos en los que se presenta la ocasión del estudio de la estadística y probabilidad.

2.2.3. El mundo social

El hombre no vive aislado: vivimos en sociedad; la familia, la escuela, el trabajo, el ocio están llenos de situaciones matemáticas. Podemos cuantificar el número de hijos de la familia, la edad de los padres al contraer matrimonio, el tipo de trabajo, las creencias o aficiones de los miembros varían de una familia a otra, todo ello puede dar lugar a estudios numéricos o estadísticos.

Para desplazarnos de casa a la escuela, o para ir de vacaciones, dependemos del transporte público. Podemos estimar el tiempo o la distancia o el número de viajeros que usarán el autobús.

En nuestros ratos de ocio practicamos juegos de azar tales como quinielas o loterías. Acudimos a encuentros deportivos cuyos resultados son inciertos y en los que tendremos que hacer cola para conseguir las entradas. Cuando hacemos una póliza de seguros no sabemos si la cobraremos o por el contrario perderemos el dinero pagado; cuando compramos acciones en bolsa estamos expuestos a la variación en las cotizaciones La estadística y probabilidad se revela como herramienta esencial en estos contextos.

2.2.4. El mundo político

El Gobierno, tanto a nivel local como nacional o de organismos internacionales, necesita tomar múltiples decisiones y para ello necesita información. Por este motivo la administración precisa de la elaboración de censos y encuestas diversas. Desde los resultados electorales hasta los censos de población hay muchas estadísticas cuyos resultados afectan las decisiones de gobierno.

Los índices de precios al consumo, las tasas de población activa, emigración - inmigración, estadísticas demográficas, producción de los distintos bienes, comercio, etc., de las que diariamente escuchamos sus valores en las noticias, proporcionan ejemplo de razones y proporciones.

2.2.5 El mundo económico

La contabilidad nacional y de las empresas, el control y previsión de procesos de producción de bienes y servicios de todo tipo no serían posibles sin el empleo de métodos y modelos matemáticos.

En la compleja economía en la que vivimos son indispensables unos conocimientos mínimos de matemáticas financieras. Abrir una cuenta corriente, suscribir un plan de pensiones, obtener un préstamo hipotecario, etc. son ejemplos de operaciones que necesitan este tipo de matemáticas.

2.3. Matemáticas en la vida cotidiana. Cultura matemática

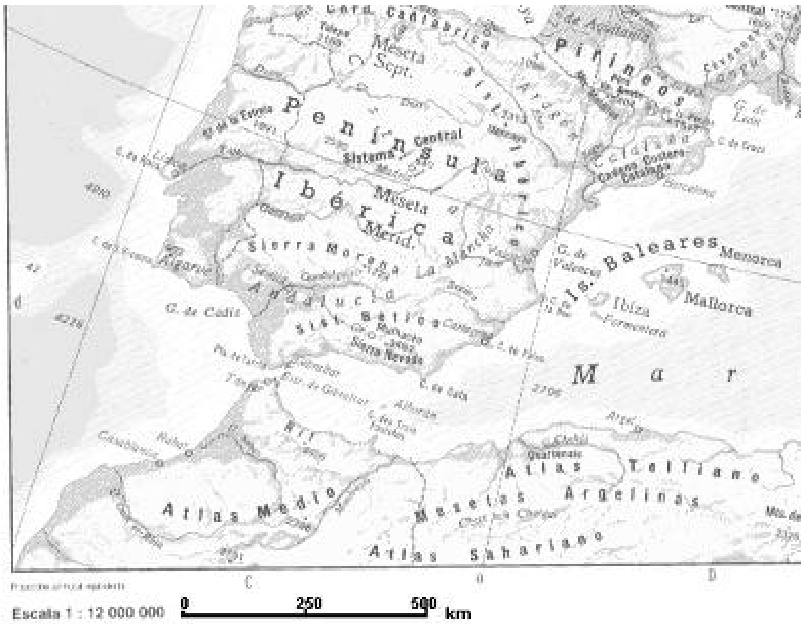
Uno de los fines de la educación es formar ciudadanos cultos, pero el concepto de cultura es cambiante y se amplía cada vez más en la sociedad moderna. Cada vez más se reconoce el papel cultural de las matemáticas y la educación matemática también tiene como fin proporcionar esta cultura. El objetivo principal no es convertir a los futuros ciudadanos en “matemáticos aficionados”, tampoco se trata de capacitarlos en cálculos complejos, puesto que los ordenadores hoy día resuelven este problema. Lo que se pretende es proporcionar una cultura con varios componentes interrelacionados:

a) Capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información matemática y los argumentos apoyados en datos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, o en su trabajo profesional.

b) Capacidad para discutir o comunicar información matemática, cuando sea relevante, y competencia para resolver los problemas matemáticos que encuentre en la vida diaria o en el trabajo profesional.

5. Las siguientes informaciones han sido tomadas de un mapa, una estación de tren y de la prensa. Indica para cada uno de ellas los conocimientos matemáticos necesarios para una lectura comprensiva

a) Se quiere calcular la distancia real entre Valencia y Casablanca con este mapa



b) En la estación de Granada se anuncia el siguiente horario:

Origen	Hora de salida	Destino	Hora de llegada	Tipo de tren
Granada	22h 10 min.	Barcelona-Sants	9h 50 min.	TALGO

c)

Marca (6/10/2002)

d)

El País (2/10/2002)

3. RASGOS CARACTERÍSTICOS DE LAS MATEMÁTICAS

El Diseño Curricular Base (DCB) para la Educación Primaria (MEC, 1989) ofrece una visión constructivista-social de las matemáticas. En este apartado incluimos un resumen de este documento, que en conjunto permite apreciar los rasgos característicos de esta visión de las matemáticas.

> 6. Contrasta tu propia manera de interpretar el conocimiento matemático con la perspectiva sugerida en los siguientes párrafos. ¿Qué implicaciones suponen para la forma de organizar la clase de matemáticas?

3.1. Modelización y resolución de problemas

El dar un papel primordial a la resolución de problemas y a la actividad de modelización tiene importantes repercusiones desde el punto de vista educativo. Sería cuanto menos contradictorio con la génesis histórica de las matemáticas, al igual que con sus aplicaciones actuales, presentar las matemáticas a los alumnos como algo cerrado, completo y alejado de la realidad. Debe tenerse en cuenta, por una parte, que determinados conocimientos matemáticos permiten modelizar y resolver problemas de otros campos y por otra, que a menudo estos problemas no estrictamente matemáticos en su origen proporcionan la base intuitiva sobre la que se elaboran nuevos conocimientos matemáticos.

> 7. En el siguiente problema, ¿cuál es el conocimiento matemático que permite resolverlo? ¿Qué significado intuitivo permite construir sobre dicho conocimiento? Inventa otros problemas sencillos que permitan construir un significado diferenciado para el conocimiento en cuestión.
>
> **Problema.** Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa?
>
> 8. ¿Qué contenidos matemáticos serían útiles para resolver los siguientes tipos de problemas:
>
> - Construir a escala la maqueta de un edificio
> - Determinar en forma aproximada la altura de una torre, desde el suelo
> - Calcular el número de lentejas en un paquete de kilo, sin contarlas todas

Desde el punto de vista de la enseñanza de las matemáticas, las reflexiones anteriores deben concretarse a la edad y conocimientos de los alumnos. No podemos proponer los mismos problemas a un matemático, a un adulto, a un adolescente o a un niño, porque sus necesidades son diferentes. Hay que tener claro que la realidad de los alumnos incluye su propia percepción del entorno físico y social y componentes imaginadas y lúdicas que despiertan su interés en mayor medida que pueden hacerlo las situaciones reales que interesan al adulto.

En consecuencia, la activación del conocimiento matemático mediante la resolución de problemas reales no se consigue trasvasando de forma mecánica situaciones "reales", aunque sean muy pertinentes y significativas para el adulto, ya que éstas pueden no interesar a los alumnos.

3.2. Razonamiento matemático

Razonamiento empírico-inductivo

El proceso histórico de construcción de las matemáticas nos muestra la importancia del razonamiento empírico-inductivo que, en muchos casos, desempeña un papel mucho más activo en la elaboración de nuevos conceptos que el razonamiento deductivo.

Esta afirmación describe también la forma en que trabajan los matemáticos, quienes no formulan un teorema “a la primera”. Los tanteos previos, los ejemplos y contraejemplos, la solución de un caso particular, la posibilidad de modificar las condiciones iniciales y ver qué sucede, etc., son las auténticas pistas para elaborar proposiciones y teorías. Esta fase intuitiva es la que convence íntimamente al matemático de que el proceso de construcción del conocimiento va por buen camino. La deducción formal suele aparecer casi siempre en una fase posterior.

Esta constatación se opone frontalmente a la tendencia, fácilmente observable en algunas propuestas curriculares, a relegar los procedimientos intuitivos a un segundo plano, tendencia que priva a los alumnos del más poderoso instrumento de exploración y construcción del conocimiento matemático.

9. Al disponer puntos en el plano en forma cuadrangular y contar el número total de éstos en cada uno de los cuadrados, obtenemos los llamados "números cuadrados": 1, 4, 9, 16, ...

```
*     * *     * * *
      * *     * * *
              * * *
```

a) ¿Podrías escribir los primeros 10 números cuadrados?
b) Llamaremos C_n al número cuadrado cuya base está formada por n puntos ¿Puedes encontrar una expresión general para C_n ?
c) ¿Puedes dar algún tipo de razonamiento que la justifique?

10. Repite el proceso para los "números triangulares":

```
*    *    *       *
     **   **      **
          ***     ***
                  ****
```

11. Analiza el papel del razonamiento empírico-inductivo y deductivo en la resolución de los problemas anteriores

Formalización y abstracción

Desde una perspectiva pedagógica -y también epistemológica-, es importante diferenciar el proceso de construcción del conocimiento matemático de las características de dicho conocimiento en un estado avanzado de elaboración. La formalización, precisión y ausencia de ambigüedad del conocimiento matemático debe ser la fase final de un largo proceso de aproximación a la realidad, de construcción de instrumentos intelectuales eficaces para conocerla, analizarla y transformarla.

Ciertamente, como ciencia constituida, las matemáticas se caracterizan por su precisión, por su carácter formal y abstracto, por su naturaleza deductiva y por su organización a menudo axiomática. Sin embargo, tanto en la génesis histórica como en su apropiación individual por los alumnos, la construcción del conocimiento matemático es inseparable de la actividad concreta sobre los objetos, de la intuición y de las aproximaciones inductivas activadas por la realización de tareas y la resolución de problemas particulares. La experiencia y comprensión de las nociones, propiedades y relaciones matemáticas a partir de la actividad real es, al mismo tiempo, un paso previo a la formalización y una condición necesaria para interpretar y utilizar correctamente todas las posibilidades que encierra dicha formalización.

3.3. Lenguaje y comunicación

Las matemáticas, como el resto de las disciplinas científicas, aglutinan un conjunto de conocimientos con unas características propias y una determinada estructura y organización internas. Lo que confiere un carácter distintivo al conocimiento matemático es su enorme poder como instrumento de comunicación, conciso y sin ambigüedades. Gracias a la amplia utilización de diferentes sistemas de notación simbólica (números, letras, tablas, gráficos, etc,), las matemáticas son útiles para representar de forma precisa informaciones de naturaleza muy diversa, poniendo de relieve algunos aspectos y relaciones no directamente observables y permitiendo anticipar y predecir hechos situaciones o resultados que todavía no se han producido.

Ejemplo:

Un número par se puede escribir como 2n. Esta expresión es equivalente a (n+1)+(n-1). Pero esta última expresión nos da una nueva información ya que muestra que todo número par es la suma de dos impares consecutivos

Sería sin embargo erróneo, o al menos superficial, suponer que esta capacidad del conocimiento matemático para representar, explicar y predecir hechos, situaciones y resultados es simplemente una consecuencia de la utilización de notaciones simbólicas precisas e inequívocas en cuanto a las informaciones que permiten representar. En realidad, si las notaciones simbólicas pueden llegar a desempeñar efectivamente estos papeles es debido a la propia naturaleza del conocimiento matemático que está en su base y al que sirven de soporte.

12. Analiza una página de un libro de matemáticas de primaria. Identifica los diferentes medios de expresión en el texto (términos, símbolos, gráficas, diagramas). Localiza los conceptos implícitos y explícitos a que hacen referencias. ¿Cómo se representan los diferentes conceptos?

16. ¿Cómo podemos comunicar las matemáticas a alumnos ciegos? ¿Piensas que pueden tener dificultades especiales con alguna parte de las matemáticas debido a su carencia?

3.4. Estructura interna

La insistencia sobre la actividad constructiva no supone en ningún caso ignorar que, como cualquier otra disciplina científica, las matemáticas tienen una estructura interna que relaciona y organiza sus diferentes partes. Más aún, en el caso de las matemáticas esta estructura es especialmente rica y significativa.

Hay una componente vertical en esta estructura, la que fundamenta unos conceptos en otros, que impone una determinada secuencia temporal en el aprendizaje y que obliga, en ocasiones, a trabajar algunos aspectos con la única finalidad de poder integrar otros que son los que se consideran verdaderamente importantes desde un punto de vista educativo. Sin embargo, interesa destacar una vez más que casi nunca existe un camino único, ni tan siquiera uno claramente mejor, y si lo hay tiene una fundamentación más de tipo pedagógico que epistemológico. Por el contrario, determinadas concepciones sobre la estructura interna de las matemáticas pueden llegar incluso a ser funestas para el aprendizaje de las mismas, como ha puesto claramente de relieve el intento de fundamentar toda la matemática escolar en la teoría de conjuntos.

13. Considera los siguientes conjuntos numéricos: números racionales, números naturales, números enteros, números decimales, números primos. ¿Cómo se relacionan entre sí?

14. ¿Por qué en los diseños curriculares, se contempla una enseñanza cíclica de algunos conceptos? Identifica algunos conceptos que aparezcan cíclicamente en los diferentes niveles de la educación primaria.

3.5. Naturaleza relacional

El conocimiento lógico-matemático hunde sus raíces en la capacidad del ser humano para establecer relaciones entre los objetos o situaciones a partir de la actividad que ejerce sobre los mismos y, muy especialmente, en su capacidad para abstraer y tomar en consideración dichas relaciones en detrimento de otras igualmente presentes.

Ejemplo

En las frases “A es más grande que B”, "A mide tres centímetros más que B”, “B mide tres centímetros menos que A", etc., no expresamos una propiedad de los objetos A y B en sí mismos, sino la relación existente entre una propiedad -el tamaño- que comparten ambos objetos y que precisamente es el resultado de la actividad de compararlos en lo que concierne a esta propiedad en detrimento de otras muchas posibles (color forma, masa, densidad volumen, etc.).

Las relaciones *más grande que, más pequeño que, tres centímetros más que, tres centímetros menos que,* etc. son pues verdaderas construcciones mentales y no una simple lectura de las propiedades de los objetos. Incluso la referencia a los objetos A y B como grande y pequeño supone una actividad de comparación con elementos más difusos, como pueden ser objetos similares con los que se ha tenido alguna experiencia anterior.

Este sencillo ejemplo muestra hasta qué punto el conocimiento matemático implica la construcción de relaciones elaboradas a partir de la actividad sobre los objetos. Las matemáticas son pues más constructivas que deductivas, desde la perspectiva de su elaboración y adquisición. Si desligamos el conocimiento matemático de la actividad constructiva que está en su origen, corremos el peligro de caer en puro formalismo. Perderemos toda su potencialidad como instrumento de representación, explicación y predicción.

Otra implicación curricular de la naturaleza relacional de las matemáticas es la existencia de estrategias o procedimientos generales que pueden utilizarse en campos distintos y con propósitos diferentes.

Ejemplo,

Numerar, contar, ordenar, clasificar, simbolizar, inferir, etc. son herramientas igualmente útiles en geometría y en estadística.

Para que los alumnos puedan percibir esta similitud de estrategias y procedimientos y su utilidad desde ópticas distintas, es necesario dedicarles una atención especial seleccionando cuidadosamente los contenidos de la enseñanza.

3.6. Exactitud y aproximación

Una característica adicional de las matemáticas, que ha ido haciéndose cada vez más patente a lo largo de su desarrollo histórico, es la dualidad desde la que permite contemplar la realidad. Por un lado la matemática es una "ciencia exacta", los resultados de una operación, una transformación son unívocos. Por otro, al comparar la modelización matemática de un cierto hecho de la realidad, siempre es aproximada, porque el modelo nunca es exacto a la realidad. Si bien algunos aspectos de esta dualidad aparecen ya en las primeras experiencias matemáticas de los alumnos, otros lo hacen más tarde.

Es frecuente que las propuestas curriculares potencien exclusivamente una cara de la moneda: la que se ajusta mejor a la imagen tradicional de las matemáticas como ciencia exacta. Así, por ejemplo, se prefiere la matemática de la certeza ("sí" o "no", "verdadero" o "falso") a la de la probabilidad ("es posible que. . . ", "con un nivel de significación de. . . "); la de la exactitud ("la diagonal mide 2", "el área de un círculo es ðr^2",...) a la de la estimación ("me equivoco como mucho en una décima", "la proporción áurea es aproximadamente 5/3", ...).

Las matemáticas escolares deben potenciar estos dobles enfoques, y ello no sólo por la riqueza intrínseca que encierran, sino porque los que han sido relegados hasta ahora a un segundo plano tienen una especial incidencia en las aplicaciones actuales de las matemáticas.

15. ¿Es posible medir con exactitud la longitud de una costa? ¿la cantidad de agua embalsada en un pantano? ¿el nivel de ruido ambiental? Pon otros ejemplos en que la medida sólo puede ser aproximada. ¿Qué interés tiene en estos casos un valor aproximado de la medida?

4. CONTENIDOS MATEMÁTICOS: CONCEPTOS, PROCEDIMIENTOS Y ACTITUDES

En el Diseño Curricular Base (MEC, 1989) se entiende por contenido escolar tanto los que habitualmente se han considerado contenidos, los de tipo conceptual, como otros que han estado más ausentes de los planes de estudio y que no por ello son menos importantes: contenidos relativos a procedimientos, y a normas, valores y actitudes. En la escuela los alumnos aprenden de hecho estos tres tipos de contenidos. Todo contenido que se aprende es también susceptible de ser enseñado, y se considera tan necesario planificar la intervención con respecto a los contenidos de tipo conceptual como planificarla con relación a los otros tipos de contenido.

En los bloques del Diseño Curricular Base se señalan en tres apartados distintos los tres tipos de contenido. El primero de ellos es el que presenta los *conceptos, hechos y principios*. Los hechos y conceptos han estado siempre presentes en los programas escolares, no tanto los principios. Por principios se entiende enunciados que describen cómo los cambios que se producen en un objeto o situación se relacionan con los cambios que se producen en otro objeto o situación.

El segundo tipo de contenido es el que se refiere a los *procedimientos*. Un procedimiento es un conjunto de acciones ordenadas, orientadas a la consecución de una meta. Se puede hablar de procedimientos mas o menos generales en función del número de acciones o pasos implicados en su realización, de la estabilidad en el orden de estos pasos y del tipo de meta al que van dirigidos. En los contenidos de procedimientos se indican contenidos que también caben bajo la denominación de "destrezas’’, técnicas’’ o “estrategias’’, ya que todos estos términos aluden a las características señaladas como definitorias de un procedimiento. Sin embargo, pueden diferenciarse en algunos casos en este apartado contenidos que se refieren a procedimientos o destrezas más generales que exigen para su aprendizaje otras técnicas más específicas, relacionadas con contenidos concretos.

> 16. La suma de números naturales es a la vez un concepto (concepto de suma) y un procedimiento (sumar). Explica cómo se apoyan entre sí el aprendizaje del procedimiento y del concepto en este caso particular.
>
> 17. Formula dos objetivos conceptuales y dos procedimentales referentes a la suma de números naturales.

El último apartado, que aparece en todos los bloques de contenido, es el que se refiere a los *valores*, *normas* y *actitudes*. La pertinencia o no de incluir este tipo de contenido en el Diseño Curricular puede suscitar alguna duda. Hay personas que consideran que puede ser peligroso estipular unos valores y unas normas y actitudes para todos los alumnos. Desde esta propuesta curricular se pretende, en cambio, que los profesores programen y trabajen estos contenidos tanto como los demás ya que, de hecho, los alumnos aprenden valores, normas y actitudes en la escuela. La única diferencia, que se considera en esta propuesta una ventaja, es que ese aprendizaje no se producirá de una manera no planificada, formando parte del currículo oculto, sino que la escuela intervendrá intencionalmente favoreciendo las situaciones de enseñanza que aseguraran el desarrollo de los valores, normas y actitudes que, a partir de las cuatro fuentes del currículo, pero especialmente de la fuente sociológica, se consideren oportunas.

> 18. ¿Cómo crees que se forman las actitudes negativas hacia las matemáticas? ¿Cómo se ponen de manifiesto?

La distinción entre contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales es, en primer lugar y sobre todo, de naturaleza pedagógica. Es decir, llama la atención sobre la conveniencia de adoptar un enfoque determinado en la manera de trabajar los contenidos seleccionados. Esta es la razón por la cual, en ocasiones, un mismo contenido aparece repetido en las tres categorías: la repetición en este caso traduce la idea pedagógica de que el contenido en cuestión debe ser abordado convergentemente desde una perspectiva conceptual, procedimental y actitudinal. En otras ocasiones, sin embargo, un determinado contenido aparece únicamente en una u otra de las tres categorías, con ello se sugiere que dicho contenido, por su naturaleza y por la intención educativa propia de la etapa, debe ser abordado con un enfoque prioritariamente conceptual, procedimental o actitudinal.

Estos tres tipos de contenido son igualmente importantes ya que todos ellos colaboran en igual medida a la adquisición de las capacidades señaladas en los objetivos generales del área. El orden de presentación de los apartados referidos a los tres tipos de contenido no supone ningún tipo de prioridad entre ellos. Los diferentes tipos de contenido no deben trabajarse por separado en las actividades de enseñanza y aprendizaje. No tiene sentido programar actividades de enseñanza y aprendizaje ni de evaluación distintas para cada uno de ellos, ya que será el trabajo conjunto lo que permitirá desarrollar las capacidades de los objetivos generales. Sólo en circunstancias excepcionales, cuando así lo aconsejen las características de los alumnos o alguno de los elementos que intervienen en la definición del Proyecto Curricular, puede ser aconsejable enfocar de manera específica el trabajo sobre uno u otro tipo de contenido.

5. UN MODELO DE ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA

La descripción de los contenidos matemáticos en el Diseño Curricular Base puede ser adecuada para una planificación global del currículo, pero consideramos que es insuficiente para describir la actividad de estudio de las matemáticas.

Por ejemplo, para el bloque temático de "Números y operaciones", los contenidos conceptuales (designados como *conceptos*) que se mencionan son:

1. Números naturales, fraccionarios y decimales:
2. Sistema de Numeración Decimal:
3. Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división:
4. Reglas de uso de la calculadora

Y como procedimientos se mencionan, entre otros,

1. Utilización de diferentes estrategias para contar de manera exacta y aproximada.
2. Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos y en la resolución de problemas numéricos.

Este listado de "conceptos y procedimientos" matemáticos es insuficiente para planificar y gestionar el proceso de enseñanza y aprendizaje de los "números y operaciones" en los distintos niveles de educación primaria. Para poder identificar las dificultades que los alumnos tienen en el estudio de las matemáticas necesitamos reflexionar sobre los tipos de objetos que se ponen en juego en la actividad matemática y las relaciones que se establecen entre los mismos. Ejemplificamos a continuación el modelo de análisis que proponemos para el caso del estudio de la suma y resta en un libro de texto.

5.1. Significados de la suma y la resta en un libro de texto

En lo que sigue analizaremos un fragmento de una lección sobre la "suma y la resta" tomada de un libro de matemáticas de 5º de matemáticas (Figuras 1.1, 1.2 y 1.3). Mostraremos[2] que, dentro de una "etiqueta" como la “suma y la resta", aparecen, además de los conceptos y procedimientos, los problemas, lenguaje y argumentos de una manera articulada y sistemática. Cada uno de estos objetos requiere una atención especial en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

A

B

LA SUMA Y LA RESTA

Sumamos cuando reunimos o juntamos varias cantidades en una sola. Restamos cuando separamos, quitamos una parte de otra o hallamos la diferencia entre dos cantidades.

EQUIPOS	PUNTOS OBTENIDOS		
	DAMAS	PARCHÍS	DIANA
LAS ÁGUILAS	180	45	220
LAS ESTRELLAS	170	45	245
LOS LEONES	170	35	235
LOS COMETAS	190	55	210

Observa y contesta

1. ¿Cuál es el equipo que ha obtenido mayor puntuación en total?
2. ¿Cuántos puntos le faltan al equipo de Los Cometas para igualar al equipo de las Estrellas?
3. ¿Cuántos puntos le faltan al equipo de Las Águilas para tener 500 puntos?
4. En la diana, ¿cuál es la diferencia de puntos obtenidos entre las bolas rojas y las bolas azules?

Figura 1.1: La suma y la resta

Observa la parte A de la figura 1.1.

[2] Se trata de un modelo epistemológico de las matemáticas que asume los supuestos básicos del constructivismo social y proporciona elementos para un análisis detallado de la actividad matemática.

19. Describe la actividad que llevan a cabo los niños en la supuesta clase de matemáticas. ¿A qué juegan? ¿Cómo anotan los puntos obtenidos en la competición?. ¿Qué tipo de representaciones matemáticas usan?

Observa la parte B

20. ¿Qué preguntas deben resolver los alumnos que usan el texto? ¿A qué situación se refieren? ¿Qué conceptos matemáticos y procedimientos debe aplicar el alumno para resolverlas?

Aunque las tareas parecen sencillas, el alumno posiblemente necesite una actividad de exploración, debe recordar sus conocimientos previos (seguramente no es la primera vez que han encontrado este tipo de problemas) y ser capaz de aplicar el algoritmo de la suma y la resta. Se espera también que el alumno justifique sus soluciones, usando los conocimientos compartidos con el profesor y el resto de la clase.

El contenido "*la suma y la resta*", no es simple. En realidad con esta expresión se hace referencia a una serie compleja de prácticas, que mostraremos con detalle a continuación con el análisis de este libro de texto. El alumno ha de ser capaz de realizar dichas prácticas para resolver los problemas aditivos que se le proponen.

Observa la parte C de la figura 1.2

21. ¿Qué otro nuevo problema se propone?

Observa la parte D de la figura 1.2

El autor usa el problema para explicar el significado de la suma y la operación de sumar números naturales.

- Introduce para ello dos formas diferentes de representar los números (sumandos): notación simbólica decimal, resaltando en columnas las unidades, decenas y centenas; y una representación lineal de los tres sumandos y el total, o suma.
- Da dos definiciones distintas de la suma:

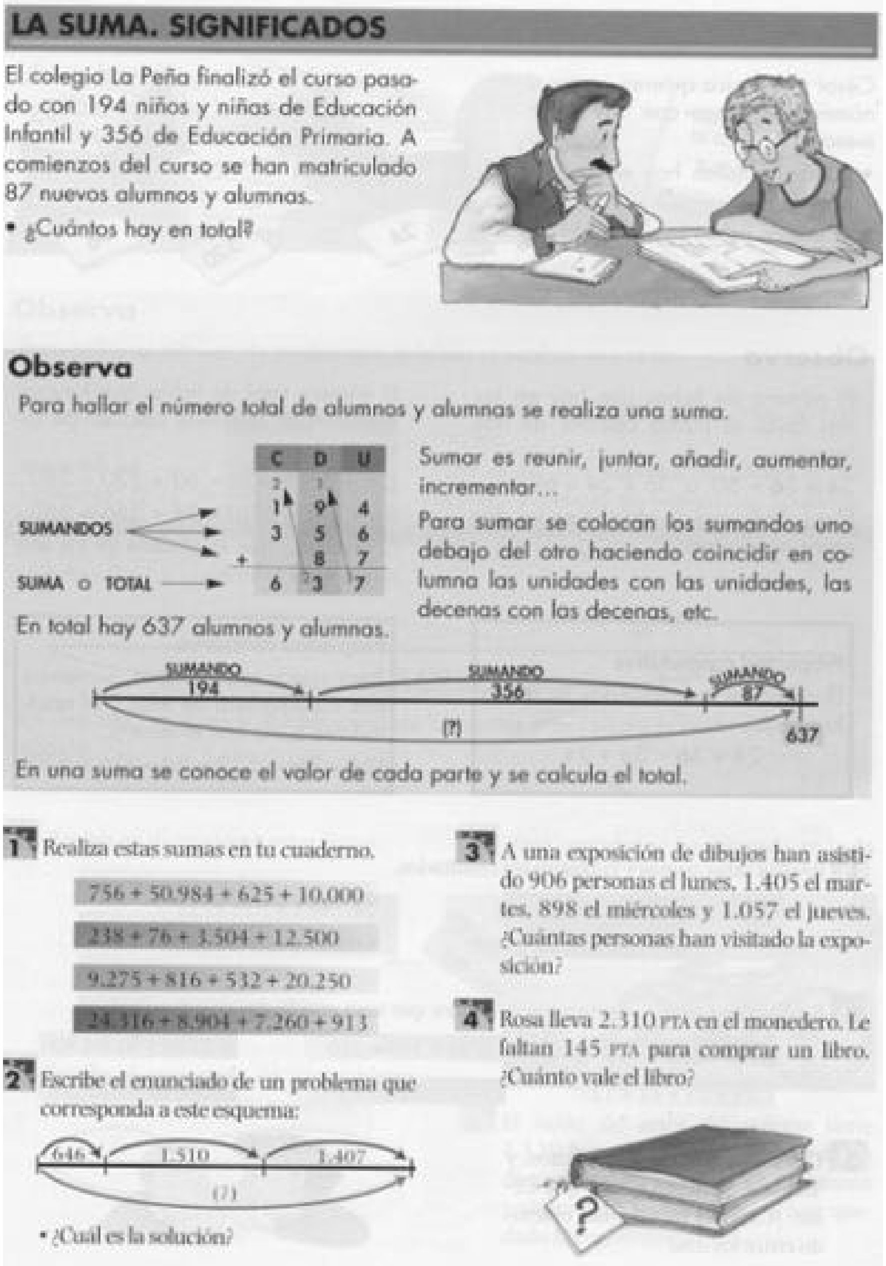
  "sumar es reunir, juntar, añadir, aumentar, incrementar, ..."

  "resultado de sumar números"

C

D

E


LA SUMA. SIGNIFICADOS

El colegio La Peña finalizó el curso pasado con 194 niños y niñas de Educación Infantil y 356 de Educación Primaria. A comienzos del curso se han matriculado 87 nuevos alumnos y alumnas.

• ¿Cuántos hay en total?

Observa

Para hallar el número total de alumnos y alumnas se realiza una suma.

	C	D	U
SUMANDOS	1	9	4
	3	5	6
+		8	7
SUMA o TOTAL	6	3	7

Sumar es reunir, juntar, añadir, aumentar, incrementar…

Para sumar se colocan los sumandos uno debajo del otro haciendo coincidir en columna las unidades con las unidades, las decenas con las decenas, etc.

En total hay 637 alumnos y alumnas.

En una suma se conoce el valor de cada parte y se calcula el total.

1 Realiza estas sumas en tu cuaderno.

756 + 50.984 + 625 + 10.000

238 + 76 + 3.504 + 12.500

9.275 + 816 + 532 + 20.250

24.316 + 8.904 + 7.260 + 913

2 Escribe el enunciado de un problema que corresponda a este esquema:

• ¿Cuál es la solución?

3 A una exposición de dibujos han asistido 906 personas el lunes, 1.405 el martes, 898 el miércoles y 1.057 el jueves. ¿Cuántas personas han visitado la exposición?

4 Rosa lleva 2.310 PTA en el monedero. Le faltan 145 PTA para comprar un libro. ¿Cuánto vale el libro?

Figura 1.2: La suma. Significados

- Describe la manera de realizar la suma de los números en el caso general:

  "se colocan los sumandos uno debajo del otro haciendo coincidir en columna las unidades con las unidades, las decenas con las decenas, etc."

22. Analiza la explicación que el profesor da de la suma en la parte D e identifica los siguientes tipos de "objetos matemáticos" que usan:
- Términos, expresiones y gráficos
- Conceptos (definiciones)
- Procedimientos (maneras de realizar las operaciones)

Algunos posibles conflictos

En la explicación de la suma (parte D) no se da ninguna justificación o argumentación de por qué la operación de sumar se hace de esta manera.

El niño que usa el libro debe interpretar lo escrito, lo que puede no estar exento de dificultades (conflictos de significados):

- Se dice que sumar es reunir, ..., luego para sumar se debería hacer esa reunión, o sea la unión de los conjuntos disjuntos involucrados. Sin embargo, puede que los alumnos del colegio no se "reúnan físicamente". La operación de sumar no se refiere a la unión de conjuntos, sino a la suma de números que expresan los cardinales de tales conjuntos.
- La descripción de la operación de sumar se hace en lenguaje ordinario y en forma general. El niño debe ponerla en correspondencia con los símbolos numéricos del ejemplo y con la gráfica de la recta numérica. Puede que el niño no vea clara la correspondencia entre los números naturales y un segmento (continuo) de la recta.
- La representación mediante la recta numérica sugiere interpretar la suma como "seguir contando". Esta es una técnica completamente diferente, que no se ha descrito en el libro.

Observa la parte E de la figura 1.2

23. ¿Qué nuevas tareas se incluyen?

¿En qué se diferencian?

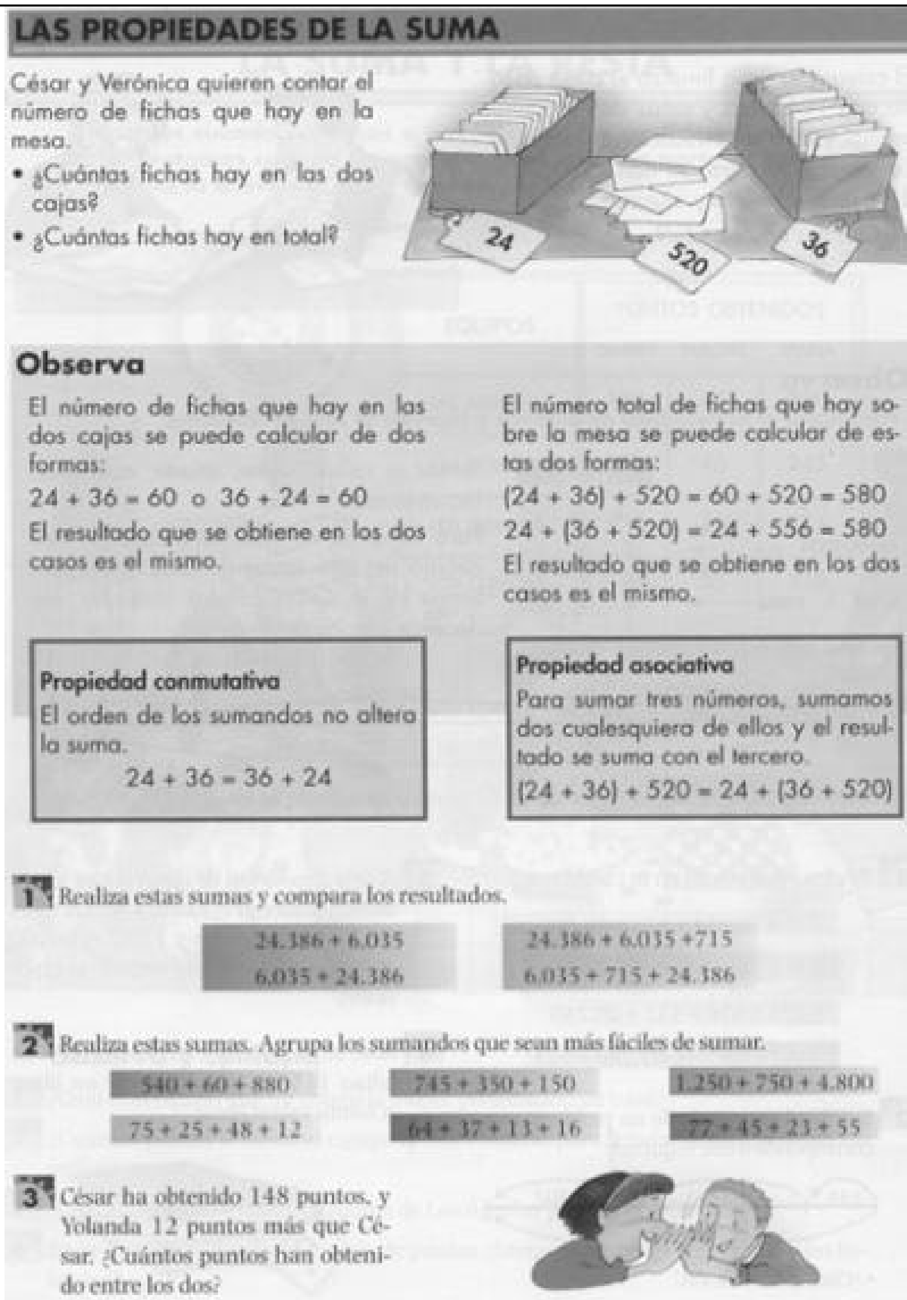
¿Qué finalidad tiene cada una de ellas?

Observa la figura 1.3

24. ¿Qué nuevas propiedades se estudian de la suma?

¿Cómo se justifican?

¿Cuál es la finalidad de los nuevos problemas presentados?



F

LAS PROPIEDADES DE LA SUMA

César y Verónica quieren contar el número de fichas que hay en la mesa.

- ¿Cuántas fichas hay en las dos cajas?
- ¿Cuántas fichas hay en total?

G

Observa

El número de fichas que hay en las dos cajas se puede calcular de dos formas:

24 + 36 = 60 o 36 + 24 = 60

El resultado que se obtiene en los dos casos es el mismo.

El número total de fichas que hay sobre la mesa se puede calcular de estas dos formas:

(24 + 36) + 520 = 60 + 520 = 580

24 + (36 + 520) = 24 + 556 = 580

El resultado que se obtiene en los dos casos es el mismo.

Propiedad conmutativa

El orden de los sumandos no altera la suma.

24 + 36 = 36 + 24

Propiedad asociativa

Para sumar tres números, sumamos dos cualesquiera de ellos y el resultado se suma con el tercero.

(24 + 36) + 520 = 24 + (36 + 520)

1 Realiza estas sumas y compara los resultados.

24.386 + 6.035	24.386 + 6.035 + 715
6.035 + 24.386	6.035 + 715 + 24.386

H

2 Realiza estas sumas. Agrupa los sumandos que sean más fáciles de sumar.

540 + 60 + 880	745 + 350 + 150	1.250 + 750 + 4.800
75 + 25 + 48 + 12	64 + 37 + 13 + 16	77 + 45 + 23 + 55

3 César ha obtenido 148 puntos, y Yolanda 12 puntos más que César. ¿Cuántos puntos han obtenido entre los dos?

Figura 1.3: Las propiedades de la suma

5.2. Tipos de objetos que intervienen en la actividad matemática

En las actividades anteriores habrás observado cómo, al describir con detalle la actividad matemática, encontramos los siguientes seis tipos de objetos:

- Problemas y situaciones (cuestiones, ejercicios, etc.)
- Lenguaje (términos, expresiones, gráficos, etc.)
- Acciones (, técnicas, algoritmos, etc.)
- Conceptos (definiciones o reglas de uso)
- Propiedades de los conceptos y acciones

- Argumentaciones (inductivas, deductivas, etc.)

Estos objetos están relacionados unos con otros. El lenguaje es imprescindible para describir los problemas, acciones, conceptos, propiedades y argumentaciones. Los conceptos y propiedades deben ser recordados al realizar las tareas, las argumentaciones sirven para justificar las propiedades.

5.3. Procesos matemáticos

En la actividad matemática aparecen también una serie de procesos que se articulan en su estudio, cuando los estudiantes interaccionan con las situaciones - problemas, bajo la dirección y apoyo del profesor. Los Principios y Estándares 2000 del NCTM resaltan la importancia de los procesos matemáticos, en la forma que resumimos a continuación.

1. Resolución de problemas (que implica exploración de posibles soluciones, modelización de la realidad, desarrollo de estrategias y aplicación de técnicas).
2. Representación (uso de recursos verbales, simbólicos y gráficos, traducción y conversión entre los mismos).
3. Comunicación (diálogo y discusión con los compañeros y el profesor).
4. Justificación (con distintos tipos de argumentaciones inductivas, deductivas, etc.).
5. Conexión (establecimiento de relaciones entre distintos objetos matemáticos).

Nosotros, además añadimos el siguiente proceso:

6. Institucionalización (fijación de reglas y convenios en el grupo de alumnos, de acuerdo con el profesor)

Estos *procesos* se deben articular a lo largo de la enseñanza de los contenidos matemáticos organizando tipos de situaciones didácticas que los tengan en cuenta. A continuación los describimos brevemente.

1. Resolución de problemas

La importancia que se da a resolución de problemas en los currículos actuales es el resultado de un punto de vista sobre las matemáticas que considera que su esencia es precisamente la resolución de problemas. Muchos autores han ayudado a desarrollar este punto de vista como, por ejemplo, Lakatos[3]. Entre estos autores destaca Polya. Para Polya[4], la resolución de un problema consiste, a grandes rasgos, en cuatro fases: 1) Comprender el problema, 2) Concebir un plan, 3) Ejecutar el plan y 4) Examinar la solución obtenida. Cada fase se acompaña de una serie de preguntas cuya intención clara es actuar como guía para la acción.

Los trabajos de Polya, se pueden considerar como un intento de describir la manera de actuar de un resolutor ideal. Ahora bien ¿Por qué es tan difícil, para la mayoría de los humanos, la resolución de problemas en matemáticas? Los trabajos de Schoenfeld[5] tienen por objetivo explicar la conducta real de los resolutores reales de problemas.

[3] En su libro "Pruebas y refutaciones" Lakatos presenta un choque de opiniones, razonamientos y refutaciones entre un profesor y sus alumnos. En lugar de presentar el producto de la actividad matemática, presenta el desarrollo de la actividad matemática a partir de un problema y una conjetura (1978, Alianza editorial)

[4] Polya, G. (1965). *¿Cómo plantear y resolver problema?*. México: Trillas

[5] Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, New York

Schoenfeld propone un marco con cuatro componentes que sirva para el análisis de la complejidad del comportamiento en la resolución de problemas: 1) Recursos cognitivos: conjunto de hechos y procedimientos a disposición del resolutor, 2) Heurísticas: reglas para progresar en situaciones difíciles, 3) Control: aquello que permite un uso eficiente de los recursos disponibles y 4) Sistema de creencias: nuestra perspectiva con respecto a la naturaleza de la matemática y cómo trabajar en ella.

La resolución de problemas no es sólo uno de los fines de la enseñanza de las matemáticas, sino el medio esencial para lograr el aprendizaje. Los estudiantes deberán tener frecuentes oportunidades de plantear, explorar y resolver problemas que requieran un esfuerzo significativo.

Mediante la resolución de problemas matemáticos, los estudiantes deberán adquirir modos de pensamiento adecuados, hábitos de persistencia, curiosidad y confianza ante situaciones no familiares que les serán útiles fuera de la clase de matemáticas. Incluso en la vida diaria y profesional es importante ser un buen resolutor de problemas.

La resolución de problemas es una parte integral de cualquier aprendizaje matemático, por lo que consideramos que no debería ser considerado como una parte aislada del currículo matemático. En consecuencia, la resolución de problemas debe estar articulada dentro del proceso de estudio de los distintos bloques de contenido matemático. Los contextos de los problemas pueden referirse tanto a las experiencias familiares de los estudiantes así como aplicaciones a otras áreas. Desde este punto de vista, los problemas aparecen primero para la construcción de los objetos matemáticos y después para su aplicación a diferentes contextos.

25. Analiza cómo se usa la resolución de problemas en el texto anteriormente analizado.

26. Indica algunas situaciones de la vida ordinaria en que sea precisa la resolución de problemas.

2. Representación con diversos lenguajes

La manera de expresar nuestras ideas influye en cómo las personas pueden comprender y usar dichas ideas. Por ejemplo, es diferente la comprensión que tenemos de los números naturales cuando los representamos mediante dígitos o mediante la recta numérica. Algunos autores como Wittgenstein piensan incluso, que sin el lenguaje no hay tales ideas, ya que éstas no son otra cosa que reglas gramaticales de los lenguajes que usamos para describir nuestro mundo.

Ejemplo

Sin la palabra “triángulo” (u otra que tenga los mismos usos) no existiría la idea de triángulo. Esta idea no es más que una regla para describir un cierto tipo de objetos (con tres vértices, con tres lados, suma de ángulos igual a 180 grados, etc.).

El lenguaje matemático tiene además una doble función:

- *representacional*: nos permite designar objetos abstractos que no podemos percibir;
- *instrumental*: como herramienta para hacer el trabajo matemático. El valor instrumental puede ser muy diferente según se trate de palabras, símbolos, o gráficas. En consecuencia, el estudio de los diversos sistemas de representación para

un mismo contenido matemático es necesario para la comprensión global del mismo.

El lenguaje es esencial para:

- comunicar las interpretaciones y soluciones de los problemas a los compañeros o el profesor;
- reconocer las conexiones entre conceptos relacionados;
- aplicar las matemáticas a problemas de la vida real mediante la modelización.
- para utilizar los nuevos recursos tecnológicos que se pueden usar en el trabajo matemático.

27. Haz una lista de las posibles representaciones a) de un triángulo, b) de un número, y c) de un conjunto de datos estadísticos. ¿Qué características se visualizan mejor en cada una de ellas?

3. Comunicación

La comunicación de nuestras ideas a otros es una parte esencial de las matemáticas y, por tanto, de su estudio . Por medio de la formulación, sea esta oral o escrita , y la comunicación, las ideas pasan a ser objetos de reflexión, discusión, revisión y perfeccionamiento. El proceso de comunicación ayuda a construir significado y permanencia para las ideas y permite hacerlas públicas.

Cuando pedimos a los estudiantes que piensen y razonen sobre las matemáticas y que comuniquen los resultados de su pensamiento a otras personas, de manera oral o escrita, aprenden a ser claros y convincentes. Cuando los estudiantes escuchan las explicaciones de otros compañeros tienen oportunidades de desarrollar sus propias interpretaciones. Los diálogos mediante los que las ideas matemáticas se exploran desde distintas perspectivas ayudan a los participantes a ajustar su pensamiento y hacer conexiones.

Cuando los alumnos participan en discusiones en las que tienen que justificar sus soluciones -especialmente cuando hay desacuerdos - mejoran su comprensión matemática a medida que tienen que convencer a sus compañeros de puntos de vista diferentes. Esa actividad también ayuda a los estudiantes a desarrollar un lenguaje para expresar ideas matemáticas y les hace conscientes de la necesidad de usar un lenguaje preciso. Los alumnos que tienen oportunidades, estímulo y apoyo para hablar, escribir, leer y escuchar en las clases de matemáticas reciben un doble beneficio: mejoran su aprendizaje matemático al tiempo que aprenden a comunicarse de manera matemática.

4. Justificación

El razonamiento matemático y la demostración son componentes esenciales del conocimiento matemático entendido éste de la manera integral que proponemos. Mediante la exploración de fenómenos, la formulación de conjeturas matemáticas, la justificación de resultados, sobre distintos contenidos matemáticos y diferentes niveles de complejidad los alumnos apreciarán que las matemáticas tienen sentido. Partiendo de las destrezas de razonamiento con las que los niños entran en la escuela, los maestros pueden ayudarles a que aprendan lo que supone el razonamiento matemático.

El razonamiento y la demostración matemática no se pueden enseñar impartiendo un tema sobre lógica, o unas demostraciones aisladas sobre temas como la geometría. Este componente del conocimiento matemático deberá estar presente en la experiencia matemática de los estudiantes desde los niveles de educación infantil. Razonar de manera matemática es un hábito, y como todos los hábitos se debe desarrollar mediante un uso consistente en muchos contextos.

5. Conexiones matemáticas

Cuando los estudiantes pueden conectar las ideas matemáticas entre sí, con las aplicaciones a otras áreas, y en contextos de su propio interés, la comprensión matemática es más profunda y duradera. Podemos postular que sin conexión no hay comprensión, o ésta comprensión es débil y deficiente. Mediante una instrucción que enfatiza las interrelaciones entre las ideas matemáticas, los estudiantes no sólo aprenden matemáticas, sino que también aprecian la utilidad de las matemáticas.

Las matemáticas no se deben ver como una colección de partes separadas, aunque con frecuencia se divide en temas que se presentan desconectados. Las matemáticas son un campo integrado de estudio, por lo que los matemáticos profesionales prefieren referirse a su disciplina en singular: la Matemática. Concebir las matemáticas como un todo resalta la necesidad de estudiar y pensar sobre las conexiones internas de la disciplina, tanto en un nivel particular del currículo como entre distintos niveles. Para enfatizar las conexiones, los profesores deben conocer las necesidades de sus estudiantes, así como las matemáticas que estudiaron en los niveles anteriores, y las que estudiarán en los siguientes.

> 28. Estudia las conexiones del concepto de polígono con otras ideas matemáticas. Elabora un mapa conceptual que ponga de relieve estas relaciones.

6. Institucionalización

Las matemáticas constituyen un sistema conceptual lógicamente organizado. Una vez que un objeto matemático ha sido aceptado como parte de dicho sistema puede ser considerado como una realidad cultural, fijada mediante el lenguaje, y un componente de la estructura lógica global. En el proceso de estudio matemático habrá pues una fase en la que se fija una "manera de decir", públicamente compartida, que el profesor deberá poner a disposición de los alumnos en un momento determinado.

Los profesores en formación de los distintos niveles educativos deberán conocer la importancia de los seis procesos de índole matemática que hemos descrito, y tenerlos en cuenta en su trabajo como directores y ayudantes de los procesos de estudio matemático de los niños.

> 29. A partir de la observación de una sesión de clase de matemáticas identifica los diferentes procesos que se ponen en juego entre los descritos anteriormente.

5.4. Conocimientos personales e institucionales

En una clase, los conocimientos de cada alumno en un momento dado son muy variados. Hablamos de conocimiento *personal* de cada alumno para diferenciarlo del conocimiento fijado por el profesor, por el libro de texto o en un currículo (*conocimiento institucional).*

Ejemplo,

> El Diseño Curricular Base (MEC) fija unos contenidos para la suma y la resta que se concretan en la programación que hace cada profesor en su clase (conocimiento institucional). Un niño puede finalizar un nivel escolar sin haber alcanzado plenamente todos los objetivos fijados.

Podemos describir metafóricamente el aprendizaje como "acoplamiento progresivo" entre significados personales e institucionales en una clase. Es importante diferenciar las facetas personal e institucional de los conocimientos matemáticos para poder describir y explicar las interacciones entre el profesor y los alumnos en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

6. TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA

Cuando queremos enseñar un cierto contenido matemático, tal como los números racionales, hay que adaptarlo a la edad y conocimientos de los alumnos, con lo cual hay que simplificarlo, buscar ejemplos asequibles a los alumnos, restringir algunas propiedades, usar un lenguaje y símbolos más sencillos que los habitualmente usados por el matemático profesional.

Ejemplo

> En Matemáticas, se define la suma de dos números naturales *a* y *b* como “el cardinal de la unión de dos conjuntos disjuntos que tienen como cardinales *a* y *b* respectivamente.
>
> Esta definición es demasiado complicada para el alumno de primaria. Se suele sustituir por ideas tales como “reunir”, “juntar”, “añadir”. Se proporciona al niño regletas, colecciones de objetos y otros materiales para que pueda experimentar con los mismos. Es claro que el significado es muy diferente en los dos casos.

La expresión "transposición didáctica"[6] hace referencia al cambio que el conocimiento matemático sufre para ser adaptado como objeto de enseñanza. Como consecuencia se producen diferencias en el significado de los objetos matemáticos entre la "institución matemática" y las instituciones escolares. Por ejemplo, los usos y propiedades de las nociones matemáticas tratadas en la enseñanza son necesariamente restringidos. El problema didáctico se presenta cuando, en forma innecesaria, se muestra un significado sesgado o incorrecto.

---

[6] Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

C: Seminario didáctico

1. ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS

(1) Cumplimentar el cuestionario adjunto de "Actitudes hacia las matemáticas". Presentar y discutir los resultados en la clase.

Cuestionario de actitudes[7]*:*

Señalar el grado de acuerdo o desacuerdo respecto de las siguientes afirmaciones sobre las matemáticas, según el siguiente convenio:

> 1: Totalmente en desacuerdo; 2: En desacuerdo; 3: Neutral (ni de acuerdo ni en desacuerdo); 4: De acuerdo; 5: Totalmente de acuerdo:

1. Considero las matemáticas como una materia muy necesaria en mis estudios.

   1 2 3 4 5

2. La asignatura de matemáticas se me da bastante mal.

   1 2 3 4 5

3. Estudiar o trabajar con las matemáticas no me asusta en absoluto

   1 2 3 4 5

4. Utilizar las matemáticas es una diversión para mí.

   1 2 3 4 5

5. Las matemáticas son demasiado teóricas para que puedan servirme de algo.

   1 2 3 4 5

6. Quiero llegar a tener un conocimiento más profundo de las matemáticas..

   1 2 3 4 5

7. Las matemáticas son una de las asignaturas que más temo.

   1 2 3 4 5

8. Tengo confianza en mí cuando me enfrento a un problema de matemáticas.

   1 2 3 4 5

9. Me divierte el hablar con otros de matemáticas.

   1 2 3 4 5

---

[7] Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitarias*. Bilbao: Mensajero.

10. Las matemáticas pueden ser útiles para el que decida realizar una carrera de "ciencias", pero no para el resto de los estudiantes.

    1 2 3 4 5

11. Tener buenos conocimientos de matemáticas incrementará mis posibilidades de trabajo.

    1 2 3 4 5

12. Cuando me enfrento a un problema de matemáticas me siendo incapaz de pensar con claridad.

    1 2 3 4 5

13. Estoy calmado/a y tranquilo/a cuando me enfrento a un problema de matemáticas.

    1 2 3 4 5

14. Las matemáticas son agradables y estimulantes para mí.

    1 2 3 4 5

15. Espero tener que utilizar poco las matemáticas en mi vida profesional.

    1 2 3 4 5

16. Considero que existen otras asignaturas más importantes que las matemáticas para mi futura profesión.

    1 2 3 4 5

17. Trabaja con las matemáticas hace que me sienta muy nervioso/a.

    1 2 3 4 5

18. No me altero cuando tengo que trabajar en problemas de matemáticas.

    1 2 3 4 5

19. Me gustaría tener una ocupación en la cual tuviera que utilizar las matemáticas.

    1 2 3 4 5

20. Me provoca una gran satisfacción el llegar a resolver problemas de matemáticas.

    1 2 3 4 5

21. Para mi futuro las matemáticas son una de las asignaturas más importantes que tengo que estudiar.

    1 2 3 4 5

22. Las matemáticas hacen que me sienta incómodo/a y nervioso/a.

    1 2 3 4 5

23. Si me lo propusiera creo que llegaría a dominar bien las matemáticas.

    1 2 3 4 5

24. Si tuviera oportunidad me inscribiría en más cursos de matemáticas de los que son obligatorios.

    1 2 3 4 5

25. La materia que se imparte en las clases de matemáticas es muy poco interesante.

1	2	3	4	5

(2) Comenta el siguiente texto que hace referencia a un chico de 12 años:

"Una mujer imploraba desesperadamente al otro lado del teléfono:

<<Tememos que nuestro hijo de doce años esté incapacitado para el aprendizaje, que tenga algo en el cerebro. No puede aprender matemáticas. ¿Querría Vd. examinarlo para ver si se puede hacer algo?>>.

Después de que Mark entrara con mucha vergüenza en mi despacho, sus primeras palabras revelaron su temor:

<<¡Así que ahora va Vd. a descubrir lo tonto que soy!>>

Le expliqué que el propósito de la reunión era descubrir qué sabía y qué no sabía de las matemáticas para que sus padres y sus maestros pudieran ayudarle mejor(...) (Baroody 1988, pp. 75-76).

(3) ¿Qué tipo de enseñanza de las matemáticas pueden generar las siguientes creencias sobre las matemáticas:

"- La incapacidad para aprender datos o procedimientos con rapidez es señal de inferioridad en cuanto a inteligencia y carácter.

- La incapacidad para responder con rapidez o emplear un procedimiento con eficacia indica <<lentitud>>.

- La incapacidad para responder correctamente indica una deficiencia mental.

- Una incapacidad total para responder es señal de una estupidez absoluta.

- Todos los problemas deben tener una respuesta correcta.

- Sólo hay una manera (correcta) de resolver un problema.

- Las respuestas inexactas (por ejemplo las estimaciones) y los procedimientos inexactos (por ejemplo, resolver problemas por ensayo y error) son inadecuados.

- Comprender las matemáticas es algo que sólo está al alcance de los genios.

- Las matemáticas no tienen por qué tener sentido." (Barody 1988, pp. 77-78).

2. REFLEXIÓN Y REDACCIÓN

(4) Explicar y dar ilustraciones de las siguientes afirmaciones:

Las matemáticas son:

- o El estudio de patrones y relaciones
- o Una manera de pensar
- o Un arte
- o Un lenguaje

(5) Compara la siguiente afirmación sobre las matemáticas con las de la actividad anterior:

Las matemáticas son la ciencia que estudia el número y el espacio

¿Estás de acuerdo con esta afirmación?

(6) Las matemáticas muchas veces se presentan como una ciencia objetiva e ideológicamente neutral.

Primero resuelve y después comenta qué opinión te merecen estos dos problemas correspondientes a textos de aritmética de inicios del siglo XX.

> *"La viuda de un militar que pereció en la última guerra de Cuba disfruta de un sueldo de 1.375 ptas al año; y dando lecciones de música y francés a algunas señoritas, gana 10 duros mensuales. ¿Qué cantidad podrá depositar cada mes en la Caja de Ahorros, necesitando para su manutención y demás gastos los 7/9 de lo que posee y destinando el 4% del resto para limosnas?"(1906)*

> *"Un industrial explotador, cuyo capital, como el de todos los capitalistas, se acumula merced a las privaciones de la clase obrera, ha determinado, contando de antemano con la inconsciencia de sus obreros, rebajar 2 reales a cada una de las 252 piezas que semanalmente le elaboran sus esclavos. Dígase cuánto representa esta rebaja al cabo de un año, cuántos obreros trabajan en su fábrica, sabiendo que cada uno fabrica 6 piezas semanalmente y cuánto roba a cada obrero?"* (1905).

(7) Para algunos sociólogos, la idea de que las matemáticas puedan variar igual que varía la organización social no es admisible.

Uno de los primeros sociólogos que se opuso a este punto de vista fue Splenger en el primer capítulo "El sentido de los números" de su obra "La decadencia de Occidente" publicada en 1918. En este capítulo Spengler expone, entre otras, las siguientes ideas:

- *"Mas no debe confundirse la matemática considerada como la facultad de pensar prácticamente los números, con el concepto mucho más estrecho de la matemática como <<teoría>> de los números desarrollada en forma hablada o escrita. Ni la matemática escrita ni la filosofía explicada en libros teóricos representan todo el caudal de intuiciones y pensamientos matemáticos y filosóficos que atesora una cultura."*

- *"En vano aplicaremos nosotros, los occidentales, nuestro propio concepto científico del número, violentamente, al objeto de que se ocupaban los matemáticos de Atenas y Bagdad; es lo cierto que el tema, el propósito y el método de la ciencia que en estas ciudades llevaba el mismo nombre, eran muy diferentes de los de nuestra matemática. <<No hay una matemática; hay muchas matemáticas>>."*

Comenta las opiniones de estos sociólogos.

3. ACTIVIDADES DE CAMPO

(8) Observar una sesión de clase de matemáticas en un nivel de primaria.

Hacer una lista de momentos en los se muestra evidencia de usar uno o varios de los procesos matemáticos considerados en la sección 5.3. Decir lo que hacen o dicen los niños y en qué tipo de actividad estaban implicados. ¿Qué papel juega el profesor?

(9) Plantear a los estudiantes de primaria las siguientes cuestiones sobre la resolución de problemas matemáticos:

a) *¿Qué es un problema matemático?*

b) *¿Qué haces para resolver un problema?*

Clasificar y discutir las distintas respuestas.

(10) Analizar y discutir la evolución de las respuestas dadas por niños de infantil y primaria a las cuestiones que se indican[8]:

a) *Maestra*: "Yo tengo 3 caramelos (la maestra enseña los 3 caramelos que tiene) y tú tienes 2 (el niño tiene 2 caramelos en su mano) ¿Quién tiene más caramelos?"

"La que tiene más caramelos es la señora de la portería que tiene una caja llena"

"No, yo no tengo ningún caramelo, tú me lo has dado, pero no son míos ... "

b) *Maestra*: ¿Qué es un problema?

"Un problema es tener un hermanito" (P3, Preescolar 3 años)

"Un problema es que mi hermano me pegue"(P3)

"Un problema es alguna cosa que nos preocupa"(P3)

"Un problema es no hacer las cosas bien"(P4)

"Un problema es perder alguna cosa" (P4)

"Que Maria se haga pipi encima"(P4)

"Un problema es que pasa alguna cosa"(P5)

"Que te dicen una pregunta que no sabes" (1º)

"Que te dicen una cosa y has de decir la respuesta" (1º)

"Es una pregunta que tienes que pensar con la cabeza" (1º)

"Es una pregunta que tienes que adivinar" (1º)

"Son preguntas que te hacen y al principio no las sabes, pero luego haces un dibujo en el papel o lo dibujas en la cabeza o te lo imaginas y luego ya lo ves más claro" (1º)

[8] Coll, C. (2001). La resolució de problemes en les primeres edats. *Biaix*, 18: 9-12.

"Un problema es una pregunta que no sabes la respuesta y tienes que pensar y pensar para dar la respuesta (2º)

c) *Maestra*: ¿Qué haces para resolver un problema?

"Estoy callado, luego no veo nada, bueno lo veo todo oscuro...y luego ya me sale la respuesta" (P4)

"Me fijo mucho y después me sale" (P4)

"Me meto lo que me dicen en la cabeza, después me lo imagino, veo lo que está pasando y luego ya lo sé" (P5)

"Pienso, muevo la cabeza y.......ya me sale" (1º)

"Lo pienso hasta que lo encuentre" (1º)

"Lo pienso un rato, depende de si el problema es difícil o no. Algunas veces sólo de escucharlo ya sé como se hace" (1º)

"Lo pienso con el cerebro" (1º)

d) Al preguntarle a un alumno de segundo ciclo si el problema,

"En un árbol hay 2 gorriones y uno se va volando. ¿Cuántos gorriones quedan?, era realmente un problema, el alumno contestó que "esto no es un problema, porque yo ya sé la solución".

e) La siguiente respuesta corresponde a un alumno de segundo ciclo inicial cuando se le pidió que explicara a un niño de otra clase los problemas que resolvían en su clase:

"Hay muchos problemas, algunos problemas los has de escuchar muy bien para saber que te preguntan, en otros los has de mirar, porque en la fotografía esta la respuesta, en otros los has de pensar sólo con la cabeza, en otros los has de tocar para saber la respuesta.....en otros necesitas alguna cosa que te ayude a hacerlos .... por ejemplo si me preguntan cuánto peso y no lo sé he de ir a pesarme y después ya sabré el problema....En otros me los imagino con la cabeza y luego ya los sé..."

¿Qué conclusión te sugieren estas respuestas sobre la enseñanza de la resolución de problemas en las primeras edades?

4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (TALLER MATEMÁTICO)

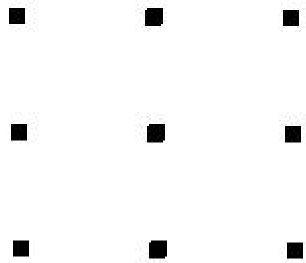
(11) Resuelve los siguientes problemas:

1. Encuentra el mayor número posible de cuadrados de cualquier tamaño que se puedan formar en un tablero de 4x4.[9]

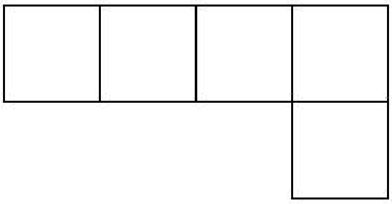
[9] Este problema se comenta en: Bolt, B. (1998). Què és la geometria?. *Biaix*, 12: 2-14.

2. Unir 6 cerillas de modo que formen cuatro triángulos equiláteros contiguos cuyos lados sean iguales a la longitud de una cerilla.[10]

3. Utilizando sólo cuatro líneas rectas, unir los nueve puntos sin levantar el lápiz del papel



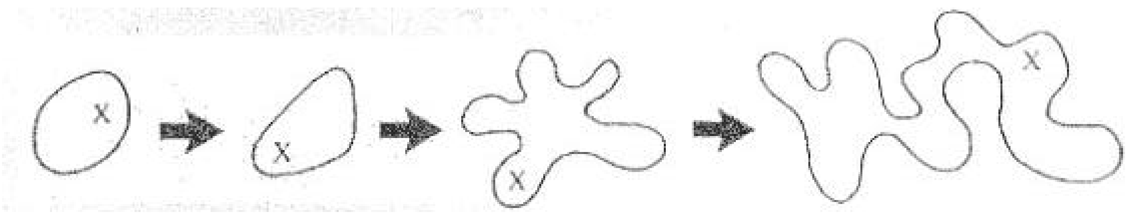
4. Desplaza tres segmentos a nuevas posiciones para que los seis cuadrados de la figura se conviertan en 4 de área igual a los de la figura



5. Demuestra que la suma de los ángulos de un triángulo es 180º

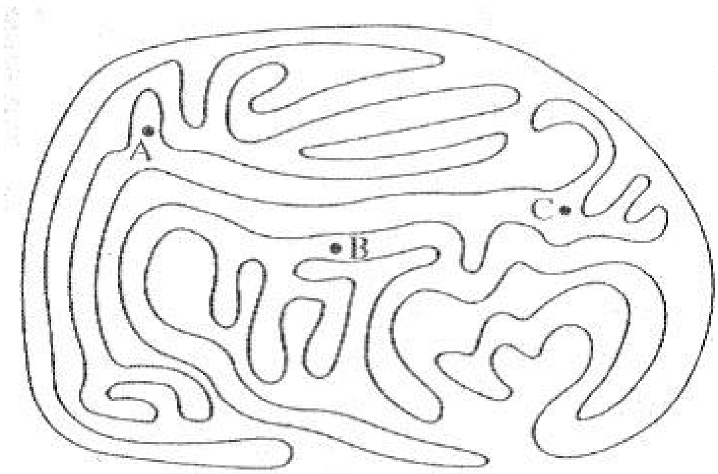
6. En las figuras siguientes resulta fácil saber si el punto X es interior o exterior a la curva y también saber si la curva (simple) es cerrada o abierta.

   a) ¿Los puntos de la figura siguiente están dentro o fuera?



   c) Un francés llamado Jordan descubrió una manera muy simple para saber si un punto es interior o exterior a una curva cerrada simple: dibujó una línea recta desde el punto hasta el exterior de la curva y contó si esta recta cortaba a la curva un número par o impar de veces. ¿Puedes decir de qué regla se trata?

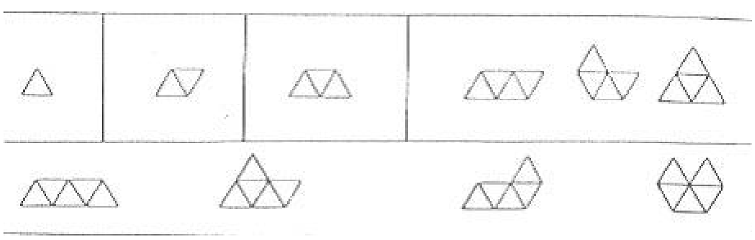
[10] Los problemas 2,3 y 4 se comentan con detalle en Orton (1990)



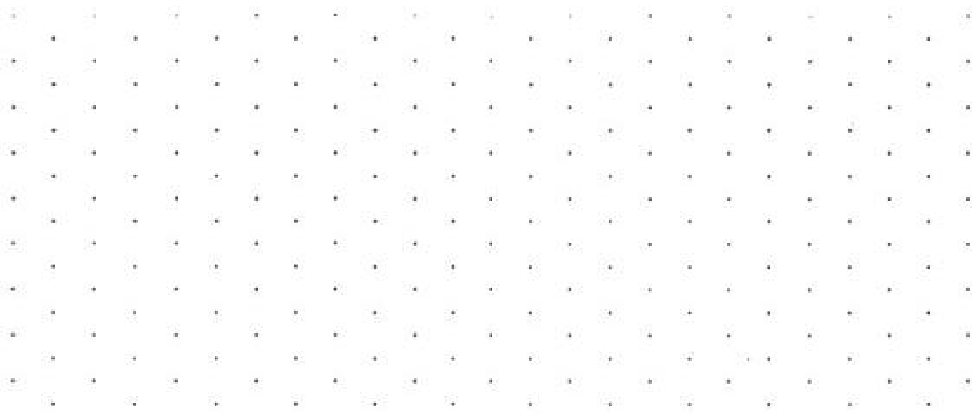
7. Tienes que completar este cuadrado mágico, de tal manera que ha de tener todos los números del 1 al 25 y ha de cumplir la propiedad de que todas las columnas y filas sumen 65.

		25	18	11
	21	19	12	10
22	20	13		
16	14			23
15			24	17

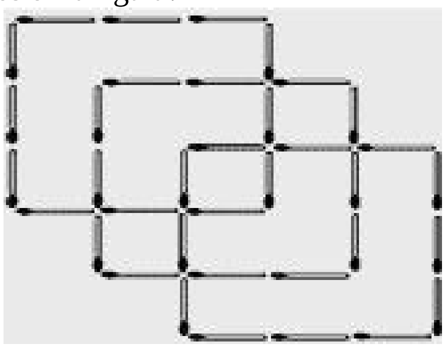
8. Las siguientes figuras son polidiamantes. Estas figuras son triángulos de un determinado tipo conectados por un lado. En la figura puedes ver los polidiamantes formados por 1 triángulo, por 2 triángulos, por 4 triángulos y por 5 triángulos.
   a) ¿Cuál es la clase de triángulos que forman los polidiamantes? ¿Qué propiedad cumplen?
   b) ¿Cuáles de los polidiamantes formados por 4 triángulos son desarrollos planos del tetraedro?



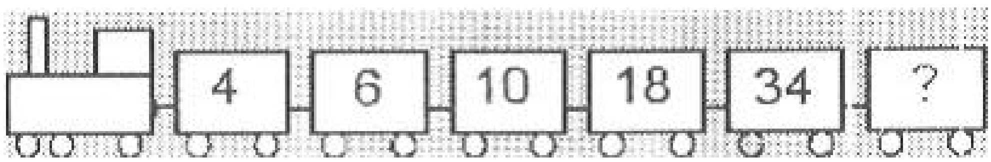
c) De polidiamantes formados por 6 triángulos, o hexadiamantes, hay 12. Dibújalos.



9. ¿Cuál es el número mínimo de cerillas que hemos de añadir para obtener exactamente 11 cuadrados en la figura?



10. ¿Cuál es el número del último vagón del tren?



11. Diez encinas producen 17 kg de oxígeno en 1 hora. ¿Cuántas encinas necesitamos para proporcionar a 34 estudiantes el oxígeno que necesitan durante 1 hora si cada uno necesita 0,7 kg por hora?
12. ¿Cuál es el número de diagonales de un polígono?
13. Dado un cuadrado de 20 cm de lado unimos los puntos medios de los lados opuestos para obtener 4 cuadrados. Si en cada cuadrado unimos los puntos medios de los lados consecutivos se obtiene otro cuadrado. ¿Cuál es su área?
14. a) A partir de los polígonos de la figura siguiente completa las filas de la tabla tomando como unidad el área del cuadrado determinado por cuatro puntos de la trama

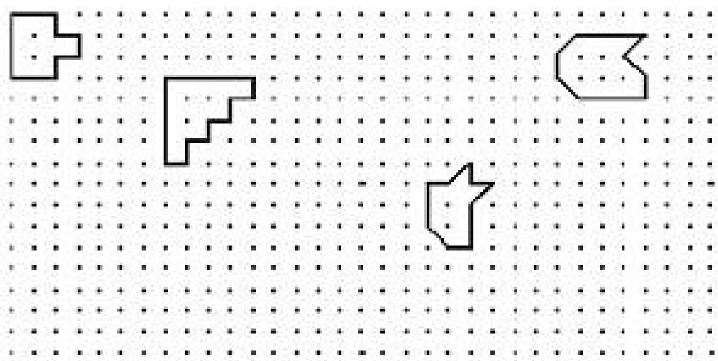


Figura	Área	Puntos interiores (i)	La mitad de los puntos de la frontera (b/2)
1	7	2	6
2			
3			
4			
5			
6			
....			

b) ¿Puedes hallar alguna relación entre el área, los puntos interiores y los puntos de la frontera (si lo necesitas puedes dibujar más polígonos)?

15. Dos amigos, Juan y Pedro, se encuentran después de mucho tiempo. Juan le pregunta a Pedro cómo le va la vida. Pedro le responde que tiene tres hijas y Juan le pregunta qué edades tienen. Pedro le dice que el producto de las tres edades es 36 y que su suma es el número de su casa (la casa de Juan). Juan piensa un rato y le dice que no hay suficiente información para saber las edades de sus hijas, a lo que Pedro responde que la mayor toca el piano. Juan descubre inmediatamente les edades de las hijas de Pedro. ¿Cuáles son las edades de las tres hijas de Pedro?

(12) A continuación tienes algunas de las estrategias que se utilizan para resolver problemas:

a. Ensayo y error,
b. Construir un modelo,
c. Análisis-síntesis,
d. Resolver un problema más simple,
e. Hallar alguna regularidad,
f. Utilizar una tabla o un esquema.

Explica cuál de ellas has utilizado para resolver cada uno de los problemas anteriores

BIBLIOGRAFÍA

Alsina, C.; Burgués, C., Fortuny, J., Jiménez, J. y Torra, M. (1995). *Enseñar matemáticas*. Barcelona: Graó.

Baroody, A. J. (1988). *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid: Visor/MEC.

Davis, P. J. y Hersh, R. (1988). *Experiencia matemática.* Madrid: MEC-Labor.

Ernest, P. (2000). Los valores y la imagen de las matemáticas: una perspectiva filosófica, *Uno*, 23: 9-28.

MEC (1989). *Diseño curricular base*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Orton, A. (1990). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Morata/MEC.

Capítulo 2

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

A: Contextualización

A1. Creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Consigna:
A continuación presentamos dos cuestionarios con algunos enunciados que reflejan diferentes modos de pensar sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

1) Completa cada cuestionario, leyendo con atención los enunciados e indicando el grado de acuerdo con cada uno de ellos, mediante un valor numérico, siguiendo el convenio presentado.

2) Si no estás de acuerdo con alguno de los enunciados, indica tus razones.

Cuestionario A:
Indica tu grado de acuerdo con cada enunciado, según el siguiente convenio:
1: Totalmente de acuerdo con el enunciado de la izquierda; 2: Si estás de acuerdo con el enunciado de la izquierda; 3: Si estás indeciso; 4: Si estás más de acuerdo con el enunciado de la derecha; 5: Si estás completamente de acuerdo con el enunciado de la derecha.

El fin principal de la educación matemática elemental es asegurar el dominio de hechos básicos, reglas, fórmulas y procedimientos	1 2 3 4 5	El fin principal de la educación matemática es promover la comprensión y el pensamiento
El crecimiento del conocimiento implica acumulación de información para estar más informado	1 2 3 4 5	El crecimiento del conocimiento implica ganar nuevas comprensiones y reorganizar el propio pensamiento
El aprendizaje es esencialmente un proceso receptivo y pasivo de memorización de información	1 2 3 4 5	El aprendizaje es esencialmente un proceso activo de construir comprensiones y estrategias
La memorización precisa de hechos y procedimientos y requiere que los niños estén atareados: que escuchen con atención y practiquen con diligencia lo que se les ha enseñado	1 2 3 4 5	La construcción activa del conocimiento requiere hacer matemáticas (esto es, descubrir patrones, hacer y comprobar conjeturas, y resolver problemas)
La instrucción directa y la práctica son el modo más efectivo de transmitir información a los niños	1 2 3 4 5	La implicación activa de los alumnos en el aprendizaje por descubrimiento y la solución de problemas es el modo más efectivo de estimular la comprensión y el pensamiento
Enseñar es explicar - un profesor es principalmente un transmisor de información.	1 2 3 4 5	Enseñar es guiar - un profesor sirve principalmente para facilitar el descubrimiento y el pensamiento.

Puesto que los niños no tienen un interés natural en aprender matemáticas, es esencial para los educadores encontrar modos de estimular el aprendizaje.	1 2 3 4 5	Puesto que los niños tienen un interés natural en explorar y comprender las cosas, las matemáticas pueden ser interesantes por sí mismas.

Cuestionario B:

Señala el grado de acuerdo o desacuerdo respecto de las siguientes afirmaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, según el siguiente convenio:
1: Totalmente en desacuerdo; 2: En desacuerdo; 3: Neutral (ni de acuerdo ni en desacuerdo); 4: De acuerdo; 5: Totalmente de acuerdo:

1. Los procedimientos no estándares se deberían descartar porque pueden interferir con el aprendizaje del procedimiento correcto.
   1 2 3 4 5
2. La instrucción matemática debería comenzar con las destrezas básicas y progresar hacia el estímulo del pensamiento de orden superior.
   1 2 3 4 5
3. Cuando se introduce un tema matemático, un profesor debería seguir el siguiente principio: "Primero lo simple y directo" y sólo más tarde introducir problemas más complejos.
   1 2 3 4 5
4. Los niños pequeños son matemáticamente incapaces. Esto es, son incapaces de resolver incluso problemas matemáticos elementales porque les falta el prerrequisito de experiencia y conocimiento.
   1 2 3 4 5
5. Para comprender las matemáticas elementales, los niños deben ser conducidos mediante una secuencia sistemática de lecciones bien organizadas.
   1 2 3 4 5
6. Un profesor debe servir como el juez de lo que es correcto o no.
   1 2 3 4 5
7. Un profesor debería siempre proporcionar feedback (esto es, alabar las respuestas correctas de los estudiantes y corregir inmediatamente sus respuestas incorrectas).
   1 2 3 4 5
8. Un profesor debería actuar rápidamente para eliminar desacuerdos porque son perturbadores y pueden causar confusión innecesaria.
   1 2 3 4 5
9. Para estimular la independencia, los estudiantes deberían trabajar solos para realizar las tareas.
   1 2 3 4 5

A2. Lectura, reflexión y discusión

Consigna:
A continuación se presenta un texto que describe una clase de matemáticas imaginaria

1) Léelo con atención. Subraya los puntos que consideras especialmente atractivos en la descripción.

2) ¿Qué puntos corresponden a una clase estándar de matemáticas? ¿Cuáles podrían alcanzarse si el profesor se lo propone? ¿Cuáles te gustaría personalmente conseguir en tu clase de matemáticas?

3) ¿Cuáles son las tareas, responsabilidades y funciones que se describen del profesor? ¿Y de los alumnos?

> *"Imagine una clase, una escuela, o un distrito escolar donde todos los estudiantes tienen acceso a una instrucción matemática atractiva y de alta calidad. Se proponen unas expectativas ambiciosas para todos, con adaptación para aquellos que lo necesitan. Los profesores están bien formados, tienen recursos adecuados que apoyan su trabajo y están estimulados en su desarrollo profesional. El currículo es matemáticamente rico y ofrece oportunidades a los estudiantes de aprender conceptos y procedimientos matemáticos con comprensión. La tecnología es un componente esencial del entorno. Los estudiantes, de manera confiada, se comprometen con tareas matemáticas complejas elegidas cuidadosamente por los profesores. Se apoyan en conocimientos de una amplia variedad de contenidos matemáticos, a veces enfocando el mismo problema desde diferentes perspectivas matemáticas o representando las matemáticas de maneras diferentes hasta que encuentran métodos que les permiten progresar. Los profesores ayudan a los estudiantes a hacer, refinar y explorar conjeturas sobre la base de la evidencia y usan una variedad de razonamientos y técnicas de prueba para confirmar o rechazar las conjeturas. Los estudiantes son resolutores flexibles de problemas y tienen recursos variados. Solos o en grupos y con acceso a la tecnología, los estudiantes trabajan de manera productiva y reflexiva, con la guía experimentada de sus profesores. Los estudiantes son capaces de comunicar sus ideas y resultados oralmente o por escrito de manera efectiva. Valoran las matemáticas y se comprometen activamente en su aprendizaje."*

(NCTM 2000, Una Visión de las Matemáticas Escolares).

B: Desarrollo de conocimientos

1. INTRODUCCIÓN

Seguramente pensarás que la visión de la clase de matemáticas que nos propone el NCTM en la lectura introductoria, aunque ciertamente ambiciosa, es muy valiosa. Hemos tomado esta lectura como punto de partida para reflexionar sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En el capítulo 1 hemos presentado nuestra visión de las matemáticas como *quehacer humano* (las matemáticas son una actividad humana), *lenguaje simbólico* (el lenguaje de la ciencia) *y sistema conceptual* (red interconectada de conceptos, propiedades y relaciones, construida progresivamente mediante negociación social). No hay duda que la forma de concebir las matemáticas por parte del profesor incidirá en la forma en que éste las enseña.

Además el profesor tiene en cuenta las funciones y tareas que cree más efectivas para favorecer el aprendizaje de sus estudiantes y la adquisición de disposiciones y actitudes favorables hacia las matemáticas. Algunas de estas tareas las debe realizar él mismo y otras las llevarán a cabo los estudiantes.

En este capítulo reflexionaremos sobre las características de una enseñanza de las matemáticas que sea eficaz para el logro del aprendizaje significativo de los alumnos. Ello implica del profesor la labor docente de dirección y ayuda en los procesos de estudio. El profesor trata de conjugar las orientaciones curriculares con una visión constructiva de las matemáticas y del aprendizaje matemático, adoptando para ello modelos didácticos coherentes.

1. ¿Cuáles de los siguientes tipos de tareas podrían ser adecuados para los alumnos en una clase de matemáticas y con relación a qué temas? ¿Qué aprenden en cada una de ellas?

- Corregir el ejercicio o examen de un compañero.
- Búsqueda de información en Internet.
- Preparar un poster con los resultados de un trabajo en equipo.
- Construir la maqueta de un edificio.

2. COMPETENCIA Y COMPRENSIÓN MATEMÁTICA

Cuando analizamos el aprendizaje, o en los documentos curriculares, se habla con frecuencia de que el fin principal es que los estudiantes *comprendan* las matemáticas o que logren *competencia* o capacidad matemática.

Ejemplos:

Las orientaciones curriculares del DCB (Documento Curricular Base, MEC, 1989), indican que, al finalizar la Educación Primaria, los alumnos habrán *desarrollado la capacidad* de identificar en su vida cotidiana situaciones y problemas para cuyo tratamiento se requieren operaciones elementales de cálculo (suma, resta), discriminando la pertinencia de las mismas y utilizando los algoritmos correspondientes.

Para los grados K-2 (Infantil y primer ciclo de primaria) el NCTM (2000) propone en uno de los estándares: *Comprender los significados de las operaciones y las relaciones entre ellas*

¿Cómo podemos reconocer la competencia y comprensión? Trataremos de clarificar estas nociones desde nuestra perspectiva del conocimiento matemático.

2.1. Nociones de competencia y comprensión

Una primera respuesta la encontramos a partir de diversos diccionarios:

- El diccionario de uso del español de María Moliner se refiere a la persona 'competente' como al "*conocedor de cierta ciencia o materia, o experto o apto en la cosa que se expresa o a la que se refiere el nombre afectado por 'competente'*". La competencia se relaciona con la aptitud, capacidad, disposición, "*circunstancia de servir para determinada cosa*". Una persona apta, o capaz, es "*útil en general para determinado trabajo, servicio o función*".
- El diccionario Penguin de Psicología define "competencia" como "*la capacidad de realizar una tarea o de finalizar algo con éxito*". Pone en juego la noción de 'capacidad', que se refiere tanto al nivel general de inteligencia de alguien como a la cualidad o destreza que tiene esa persona para hacer una cosa particular.

Parece claro que la competencia es un rasgo cognitivo y disposicional del sujeto. También que será distinta según el campo profesional, el objeto de saber o la edad. Hablamos así de competencia matemática del ingeniero, del físico, o del estudiante de primaria o secundaria.

Ejemplos

Un ingeniero puede ser muy competente en su campo y no serlo como traductor de alemán. Una cocinera competente puede no ser competente como conductora. Alguien puede ser competente para el bricolage, la mecánica de los automóviles, pero un incompetente para la gestión burocrática, etc.

Vemos que la palabra *competencia* se refiere a un saber hacer específico. Generalmente tener competencia es equivalente a tener conocimiento práctico sobre algo; se usa habitualmente referido a destrezas manipulativas o procedimentales.

- En el caso de las matemáticas se podrá hablar de competencias generales, como competencia aritmética, algebraica, geométrica; o más específicas como, competencia para resolver ecuaciones, cálculo con fracciones, etc.
- Las expresiones del tipo, "A es competente para realizar la tarea T", indican que el sujeto A domina o es capaz de aplicar correctamente la técnica *t* que resuelve o permite hacer bien la tarea T. Decimos que el sujeto tiene una capacidad o competencia específica, o que "sabe cómo hacer" la tarea.

3. Da una lista de competencias específicas relacionadas con la adición y substracción. ¿Cómo podrías evaluar tales competencias?

4. Analiza una lección de un texto de matemáticas de primer curso de primaria. ¿Qué competencias se tratan de desarrollar?

- El diccionario de uso del español de María Moliner define la *comprensión* como "entendimiento" o "facultad de comprender". Comprender lo considera "entender; percibir el significado de algo", "percibir las ideas contenidas en algo dicho o escrito".
- Por tanto, cuando decimos "A comprende la técnica t que permite realizar la tarea T", queremos decir que A sabe por qué dicha técnica es adecuada, conoce su ámbito de validez y la relaciona con otras técnicas.

Competencia y comprensión se complementan mutuamente:

- La competencia atiende al componente práctico, mientras que la comprensión al componente teórico del conocimiento.
- La competencia pone en juego conocimientos de tipo procedimental, la comprensión requiere conocimiento conceptual.

La sociedad valora la acción; pero, ¿es posible o deseable la acción sin comprensión? Parece que la acción será más flexible y adaptable, generalizable, y por tanto, más eficaz si va acompañada de comprensión, de saber por qué se hacen así las cosas.

5. ¿Piensas que en el caso de las matemáticas, podemos separar los conocimientos de tipo conceptual y procedimental? ¿Por qué?

6. ¿En qué medida el profesional competente tiene también conocimientos conceptuales, lógicos y argumentativos.

7. Al preguntar a un alumno de 6º qué significa la frase "El número medio de hijos por familia en España es 1.2" da la siguiente respuesta: "*Significa que por cada familia, si hubiera que repartir todos los hijos, tocaría a cada una un hijo. El 1.2 es tan solo el número de la operación matemática*". Analiza los tipos de comprensión y competencia sobre la media que podemos deducir de la respuesta del niño.

2.2. Comprensión instrumental y relacional

Richard Skemp[1] (psicólogo y matemático) analizó la diferencia entre *comprensión relacional* (saber qué) y *comprensión instrumental* (saber hacer). Estos dos tipos de comprensión no siempre van unidos.

Ejemplo

Es frecuente que los alumnos aprendan el algoritmo de la resta llevándose, sin saber por qué se aplica el algoritmo.

[1] Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.

Otro caso es que los alumnos sumen correctamente fracciones pasando a común denominador, aunque no entiendan por qué no pueden sumarse directamente las fracciones de distinto denominador.

Al preguntarse si un tipo de comprensión es preferible al otro, Skemp concluye a favor de la comprensión relacional. El conocimiento instrumental implica la aplicación de múltiples reglas en lugar de unos pocos principios de aplicación general, y por tanto puede fallar en cuanto la tarea pedida no se ajuste exactamente al patrón estándar.

- Para las matemáticas relacionales Skemp citas las siguientes ventajas:

1. Son más adaptables a nuevas tareas. Al saber no sólo qué método funciona sino también por qué, el niño puede adaptar los métodos a los nuevos problemas, mientras que si sólo tiene comprensión instrumental necesita aprender un método diferente para cada nueva clase de problemas.

2. Las matemáticas relacionales son más fáciles de recordar, aunque son más difíciles de aprender. Ciertamente es más fácil que los alumnos aprendan que "el área de un triángulo = (1/2) base x altura", que aprender por qué eso es así. Ahora bien, tienen que aprender reglas separadas para los triángulos, rectángulos, paralelogramos, trapecios; mientras que la comprensión relacional consiste en parte en ver todas estas fórmulas con relación al área del rectángulo. Si se sabe cómo están interrelacionadas se pueden recordar mejor que como partes desconectadas. Hay más cosas que aprender –las conexiones y las reglas separadas- pero el resultado, una vez aprendido, es más duradero.

Vemos, por tanto, que aunque a corto plazo y en un contexto limitado las matemáticas instrumentales pueden estar justificadas, no pueden estarlo a largo plazo y en el proceso educativo del niño.

- Sin embargo, algunos profesores enseñan unas matemáticas instrumentales, por las siguientes razones:

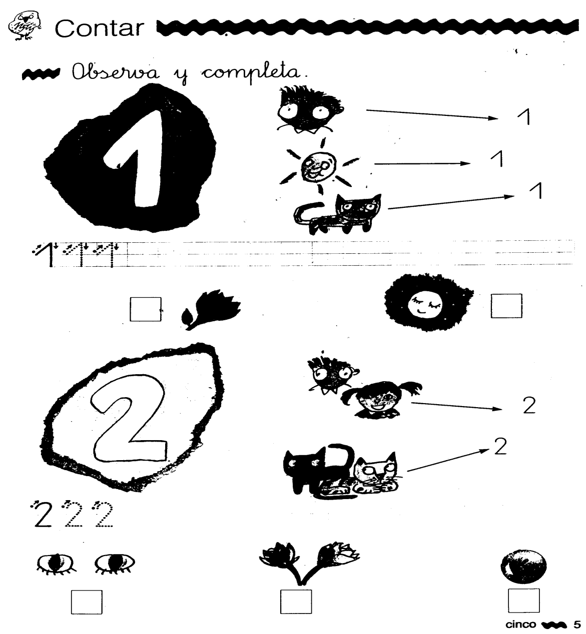
  1. Son usualmente más fáciles de aprender; por ejemplo, es difícil entender relacionalmente la multiplicación de dos números negativos, o la división de fracciones , mientras que reglas como "Menos por menos, más" y "para dividir por una fracción, multiplicas en cruz " se recuerdan con facilidad.

  2. Debido a que se requieren menos conocimientos, permite proporcionar la respuesta correcta de manera más rápida y fiable que la que se consigue mediante un pensamiento relacional.

  3. Al poder dar la respuesta correcta rápidamente el alumno puede obtener un sentimiento de éxito.

Estas argumentaciones, presentadas por Skemp en los años setenta, sobre las relaciones entre comprensión instrumental y relacional nos parecen igualmente válidas para las relaciones entre competencia y comprensión entendidas como hemos propuesto en la primera sección.

8. Analiza en la siguiente ficha, tomada de un texto escolar. ¿Qué conocimientos instrumentales y relacionales se requieren para su realización. ¿Cómo podríamos distinguir si un niño que realiza la tarea con competencia, también comprende lo que hace



2.3. Los objetos de comprensión y competencia

Para lograr la comprensión y la competencia matemática, tenemos que responder a dos cuestiones básicas:

- ¿Qué comprender? ¿Cuáles son los conocimientos matemáticos que queremos que nuestros alumnos lleguen a dominar? La respuesta a estas preguntas es el eje descriptivo, que indicará los aspectos o componentes de los objetos a comprender. Definir la "buena" comprensión y la "buena competencia" matemática requiere definir previamente las "buenas" matemáticas.
- ¿Cómo lograr la comprensión y la competencia por parte de nuestros alumnos? La respuesta a esta pregunta es el eje procesual que indicará las fases o momentos necesarios para el logro tanto de la "buena" comprensión como de la "buena" competencia.

Nuestras ideas sobre el logro de la competencia y comprensión están, por consiguiente, íntimamente ligadas a cómo concebimos el conocimiento matemático[2]. Los términos y expresiones matemáticas denotan entidades abstractas cuya naturaleza y origen tenemos que explicitar para poder elaborar un modelo útil y efectivo sobre qué

[2] Si, por ejemplo, consideramos el conocimiento matemático como información internamente representada, la comprensión ocurre cuando las representaciones logran conectarse en redes progresivamente más estructuradas y cohesivas. Pero equiparar la actividad matemática al procesamiento de información nos parece excesivamente reduccionista, por lo que, desde nuestro punto de vista las teorías de la comprensión derivadas de esta concepción no modelizarían adecuadamente los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en especial los aspectos sociales y culturales implicados en dichos procesos.

entendemos por comprender tales objetos. Para ello debemos responder a preguntas tales como: ¿Cuál es la estructura del objeto a comprender? ¿Qué formas o modos posibles de comprender existen para cada objeto matemático? ¿Qué aspectos o componentes de la práctica y el discurso matemático es posible y deseable que aprendan los estudiantes en un momento y circunstancias dadas? ¿Cómo articular el estudio de sus diversas componentes?

9. Supón que tienes que enseñar los números del 10 al 15 a un niño de primer curso de Primaria. Analiza la estructura de este conocimiento. ¿Qué conceptos, representaciones, procedimientos debe aprender el niño si queremos que logre competencia y comprensión de estos números? ¿Cómo podríamos secuenciar su enseñanza? Da algunos ejemplos de actividades que resulten significativas para este aprendizaje.

10. ¿Te parece suficiente el modelo epistemológico en el que de manera implícita basa Skemp su análisis de la comprensión instrumental y relacional, y que le lleva a considerar dos tipos de matemáticas: una matemática instrumental y otra relacional? ¿Cuáles son las características de ambas matemáticas? ¿Cómo están relacionadas? ¿Qué otras facetas deberíamos tener en cuenta?

Hemos visto que todo modelo de competencia y comprensión matemática involucra una determinada manera de entender las matemáticas y los objetos matemáticos. El reconocimiento de la complejidad del conocimiento matemático que hemos expuesto en el capítulo 1 debe llevarnos, coherentemente, a reconocer también una complejidad para el logro de la competencia y comprensión matemática.

11. ¿Piensas que se puede concebir la comprensión y competencia como estados dicotómico, esto es, se tiene o no competencia, se comprende o no se comprende un tema matemático? ¿Se tratan más bien de procesos en progresivo crecimiento y mejora, que además dependen y deberán ser valorados respecto a los contextos institucionales correspondientes?.

12. A continuación tienes algunas de las respuestas de alumnos del primer curso de la especialidad de maestro de primaria a la pregunta *¿Qué significa saber matemáticas?* formulada cuando ingresan en la facultad. Coméntalas teniendo en cuenta las consideraciones anteriores sobre comprensión y competencia.

- Saber hacer los cálculos y resoluciones de problemas apropiados para la edad del alumno.
- Adquirir y utilizar los métodos y estrategias necesarias para poder resolver los ejercicios.
- Aplicar los contenidos matemáticos que han aprendido.
- Tener la capacidad suficiente para poder resolver o explicar cualquier cuestión relacionada con las matemáticas.
- Tener interiorizados conocimientos sobre la materia en cuestión.
- Entenderemos por "saber matemáticas" que cualquier individuo haya adquirido unos conceptos básicos
- Saber matemáticas significa tener conocimientos sobre esta asignatura dependiendo del nivel en que se encuentre.

3. APRENDER Y ENSEÑAR MATEMATICAS

De acuerdo con nuestra concepción de las matemáticas, descrita en el capítulo 1, "conocer" o "saber" matemáticas, es algo más que repetir las definiciones o ser capaz de identificar propiedades de números, magnitudes, polígonos u otros objetos matemáticos. La persona que sabe matemáticas ha de ser capaz de usar el lenguaje y conceptos matemáticos para resolver problemas. No es posible dar sentido pleno a los objetos matemáticos si no los relacionamos con los problemas de los que han surgido.

Ejemplos:

Si no se pone a los niños en situación de contar o de comparar cantidades de objetos, de ordenar colecciones, no captarán el sentido de los números naturales.

Es difícil comprender la utilidad de los números enteros negativos si no nos hemos encontrado con la necesidad de resolver algunas ecuaciones algebraicas cuya solución es negativa.

- Es frecuente que las orientaciones curriculares insistan en que el aprendizaje de las matemáticas debe ser significativo y que para conseguirlo *"Los estudiantes deben aprender las matemáticas con comprensión, construyendo activamente los nuevos conocimientos a partir de la experiencia y los conocimientos previos"* (NCTM, 2000, Principio de Aprendizaje)
- Las orientaciones curriculares consideran que el aprendizaje significativo supone comprender y ser capaz de aplicar los procedimientos, conceptos y procesos matemáticos, y para ello deben coordinarse el conocimiento de hechos, la eficacia procedimental y la comprensión conceptual.

13. Supongamos que quieres lograr de tus alumnos de primaria un aprendizaje significativo de la multiplicación de números naturales de hasta dos cifras. Enumera:

- Algunos hechos que los alumnos deben conocer.
- Algunos procedimientos que deben dominar.
- Algunos conceptos y propiedades que deben comprender.

Redacta un ejercicio de evaluación para cada uno de ellos.

14. ¿Por qué los estudiantes que memorizan hechos o procedimientos sin comprensión a menudo no están seguros de cuándo y cómo usar lo que conocen, y ese aprendizaje es con frecuencia frágil?

15. ¿Por qué el aprendizaje con comprensión hace más fácil el aprendizaje posterior y las matemáticas tienen más sentido y son más fáciles de recordar y de aplicar cuando los estudiantes conectan de manera significativa los nuevos conocimientos con los ya construidos?.

3.1. Papel de la resolución de problemas en el aprendizaje significativo

La actividad de resolver problemas es esencial si queremos conseguir un aprendizaje significativo de las matemáticas. No debemos pensar en esta actividad sólo como un contenido más del currículo matemático, sino como uno de los vehículos principales del aprendizaje de las matemáticas, y una fuente de motivación para los alumnos ya que permite contextualizar y personalizar los conocimientos. Al resolver un problema, el alumno dota de significado a las prácticas matemáticas realizadas, ya que comprende su finalidad.

El trabajo del alumno en la clase de matemáticas debe ser en ciertos momentos comparable al de los propios matemáticos:

- el alumno investiga y trata de resolver problemas, predice su solución (formula conjeturas),
- trata de probar que su solución es correcta,
- construye modelos matemáticos,
- usa el lenguaje y conceptos matemáticos, incluso podría crear sus propias teorías,
- intercambia sus ideas con otros,
- finalmente reconoce cuáles de estas ideas son correctas- conformes con la cultura matemática-, y entre todas ellas elige las que le sean útiles.

Por el contrario, el trabajo del profesor es, en cierta medida, inverso al trabajo de un matemático:

- En lugar de partir de un problema y llegar a un conocimiento matemático, parte de un conocimiento matemático y busca uno o varios problemas que le den sentido para proponerlo a sus alumnos (recontextualización).
- Una vez producido un conocimiento, el matemático lo despersonaliza. Trata de quitarle todo lo anecdótico, su historia y circunstancias particulares, para hacerlo más abstracto y dotarlo de una utilidad general. El profesor debe, por el contrario, hacer que el alumno se interese por el problema (repersonalización). Para ello, con frecuencia busca contextos y casos particulares que puedan motivar al alumno.

16. Busca algunos problemas interesantes para los alumnos que le sirvan para comprender la multiplicación de fracciones. ¿Cómo se ejemplifican los procesos de recontextualización y repersonalización en esta actividad?

No basta con cualquier solución a un problema. El profesor trata de ayudar a sus alumnos a encontrar las que son “correctas” matemáticamente. El conocimiento matemático tiene una dimensión cultural. Por ello el profesor ha de ayudar a sus alumnos a encontrar o construir este "saber cultural" de modo que progresivamente se vayan incorporando a la comunidad científica y cultural de su época.

3.2. Enseñanza de las matemáticas

La mayor parte de los profesores comparten actualmente una *concepción constructivista* de las matemáticas y su aprendizaje. En dicha concepción, la actividad de los alumnos al resolver problemas se considera esencial para que éstos puedan construir el conocimiento.

Pero el aprendizaje de conceptos científicos complejos (por ejemplo de conceptos físicos o matemáticos) en adolescentes y personas adultas, no puede basarse solamente en un constructivismo estricto. Requeriría mucho tiempo de aprendizaje y, además, se desperdiciarían las posibilidades de poder llevar al alumno rápidamente a un estado más avanzado del conocimiento, mediante técnicas didácticas adecuadas.

17. ¿Por qué una interpretación ingenua del constructivismo, daría un papel limitado a la enseñanza, considerando que el principal trabajo del profesor sería seleccionar problemas significativos para sus alumnos?.

18. ¿Qué implicaciones se deducen para la enseñanza del hecho que las matemáticas no constituyen solamente una actividad sino también son un lenguaje simbólico y un sistema conceptual, lógicamente organizado?

- El aprendizaje de una lengua, requiere la práctica de la conversación desde su comienzo, pero si queremos lograr un aprendizaje funcional que permita la comunicación, será preciso el estudio de la gramática. Del mismo modo, además de *hacer matemáticas* es preciso estudiar las *reglas matemáticas* para poder progresar en la materia.
- Puesto que disponemos de todo un sistema conceptual previo, herencia del trabajo de las mentes matemáticas más capaces a lo largo de la historia desaprovecharíamos esta herencia si cada estudiante tuviese que redescubrir por sí mismo todos los conceptos que se le tratan de enseñar.

La ciencia, y en particular las matemáticas, no se construyen en el vacío, sino sobre los pilares de los conocimientos construidos por nuestros predecesores. El fin de la enseñanza de las matemáticas no es sólo capacitar a los alumnos a resolver los problemas cuya solución ya conocemos, sino prepararlos para resolver problemas que aún no hemos sido capaces de solucionar. Para ello, hemos de acostumbrarles a un trabajo matemático auténtico, que no sólo incluye la solución de problemas, sino la utilización de los conocimientos previos en la solución de los mismos.

19. La mejora de la educación matemática para todos los estudiantes requiere una enseñanza eficaz de las matemáticas en las clases. Comenta la cita siguiente *"La enseñanza eficaz de las matemáticas requiere comprender lo que los estudiantes conocen y necesitan aprender y, en consecuencia, les desafía y apoya para aprender bien los nuevos conocimientos"* (NCTM, 2000, Principio de la Enseñanza).

Los estudiantes aprenden matemáticas por medio de las experiencias que les proporcionan los profesores. Por tanto, la comprensión de las matemáticas por parte de los estudiantes, su capacidad para usarlas en la resolución de problemas, y su confianza y buena disposición hacia las matemáticas están condicionadas por la enseñanza que encuentran en la escuela.

No hay recetas fáciles para ayudar a todos los estudiantes a aprender, o para que todos los profesores sean eficaces. No obstante, los resultados de investigaciones y experiencias que han mostrado cómo ayudar a los alumnos en puntos concretos deberían guiar el juicio y la actividad profesional. Para ser eficaces, los profesores deben conocer y comprender con profundidad las matemáticas que están enseñando y ser capaces de apoyarse en ese conocimiento con flexibilidad en sus tareas docentes. Necesitan comprender y comprometerse con sus estudiantes en su condición de aprendices de matemáticas y como personas y tener destreza al elegir y usar una variedad de estrategias pedagógicas y de evaluación. Además, una enseñanza eficaz requiere una actitud reflexiva y esfuerzos continuos de búsqueda de mejoras.

20. A continuación tienes algunas de las respuestas de alumnos del primer curso de la especialidad de maestro de primaria a la pregunta *¿Qué significa enseñar matemáticas?,* formulada cuando ingresan en la facultad. ¿Crees que la mayoría corresponden a una concepción constructivista?.

- Para enseñar matemáticas se requiere de unos conocimientos previos de ámbito matemático, y al mismo tiempo ser capaz de transmitir tus conocimientos de manera clara, concisa y ordenada a los alumnos.
- Saber transmitir de forma coherente y que se pueda entender los objetivos, contenidos y procedimientos de esta materia.
- Transmitir tus conocimientos adaptándolos al ciclo educativo al que va dirigido.
- Explicar de manera clara y coherente de forma que los otros te entiendan sin dificultades.
- Tener los conocimientos adecuados para motivar al niño a aprender matemáticas.
- Es utilizar todos los procedimientos, recursos y estrategias necesarias para ayudar al alumno (suporte pedagógico) a adquirir unos aprendizajes significativos.

4. ESTUDIO DIRIGIDO DE LAS MATEMÁTICAS

Llamaremos *instrucción matemática* o *estudio dirigido de las matemáticas* a la enseñanza y aprendizaje organizado de un contenido matemático dentro de la clase de matemáticas.

Ejemplos:

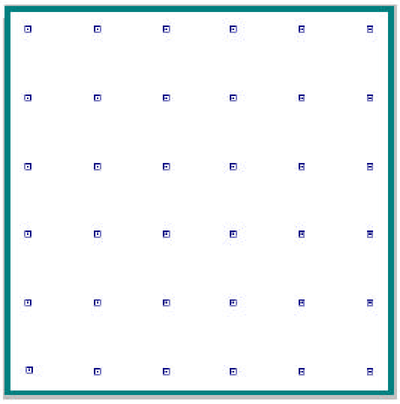
- El estudio dirigido del sistema de numeración decimal en la escuela primaria;
- El estudio dirigido de la suma de números naturales en una clase de primaria
- El estudio dirigido de las funciones en una clase de educación secundaria.

En los ejemplos anteriores, y en todo proceso de instrucción matemática intervienen:

- Un contenido matemático, que incluye todas las prácticas en torno al mismo. En el segundo ejemplo anterior estas prácticas incluirían los algoritmos de la suma, el aprendizaje de las tablas, la forma de colocación de los sumandos y el total, la resolución de problemas sencillos, etc. Hablamos de *sistema de prácticas matemáticas* relativas a la suma.
- Unos sujetos que tratan de adquirir (apropiarse, construir) dicho contenido, en nuestro ejemplo los alumnos de la clase.
- El profesor, que dirige y organiza el proceso de instrucción.
- Los recursos didácticos o medios instruccionales, entre los que incluimos el tiempo, libros, fichas, materiales manipulativos, etc.

Un supuesto básico del constructivismo piagetiano es el aprendizaje por adaptación a un medio. Ciertamente que el conocimiento progresa como resultado de la construcción personal del sujeto enfrentado a tareas problemáticas. Pero es preciso tener también en cuenta el papel de la interacción entre los propios alumnos y la de éstos con el profesor. Esta última es crucial para orientar e impulsar el aprendizaje, debido a que el conocimiento matemático tiene un componente discursivo (basado en reglas y argumentos) y no sólo un componente práctico (basado en problemas y acciones).

21. Damos a una pareja de niños de segundo curso de primaria un geoplano y una caja de gomas de colores, con la siguiente consigna: *Construye todos los triángulos de diferentes formas y tamaño como puedas. Discute con tu compañero cuáles son iguales y por qué. ¿Cuáles son diferentes y por qué?*



a) ¿Qué estrategias pueden usar los niños de esta edad para realizar la tarea? ¿Qué aprenden al realizarla?

b) ¿Qué vocabulario podrían emplear? ¿Qué conceptos y propiedades hay implícitos detrás de los mismos?

c) ¿Por qué es mejor que los dos niños trabajen juntos, en lugar de trabajar por separado?

d) Indica algunas posibles dificultades o errores y cómo el profesor puede ayudar a superarlas.

e) ¿Cómo cambia la tarea si en vez del geoplano usamos papel y lápiz? ¿Y si les damos una colección de figuras triangulares planas de plástico para clasificar?

La *instrucción matemática significativa* atribuye un papel clave a la interacción social, a la cooperación, al discurso, y a la comunicación, además de a la interacción del sujeto con las situaciones-problemas. El sujeto aprende mediante su interacción con un medio instruccional, apoyado en el uso de recursos simbólicos, materiales y tecnológicos disponibles en el entorno. Algunas consecuencias de este enfoque de la enseñanza son las siguientes:

1. Para que el estudio de un cierto concepto sea significativo, debemos mostrar a los alumnos una muestra representativa de las prácticas que lo dotan de significado. Al planificar la enseñanza debemos partir del análisis del significado de dicho concepto. Puesto que el tiempo de enseñanza es limitado, se procurará seleccionar las prácticas más representativas.

Ejemplo

Al enseñar a los niños la clasificación de los cuadriláteros, será mejor mostrar algún ejemplo de cada tipo diferente de cuadrilátero (rombos, cuadrados, trapecios, paralelogramos, etc.) más que centrarnos en muchos ejemplos del mismo tipo (solo paralelogramos). Conviene también plantearles problemas variados (construcción, medida del perímetro, clasificación, cálculo y medida de área, etc.), más que repetir muchas veces el mismo tipo de problema. El significado del concepto *cuadrilátero* será más completo cuanto mayor sea la gama de propiedades, lenguaje y problemas presentados.

2. Es importante dar a los alumnos la oportunidad de plantearse y de tratar de resolver problemas interesantes para que: 1) formulen hipótesis y conjeturas, 2) traten de usar diferentes sistemas de representación, 3) traten de comunicar y validar las soluciones propuestas, 4) confronten sus soluciones con las de otros compañeros, y, finalmente, 5) traten de confrontar su solución con la solución que se considera correcta en matemáticas.
3. Debemos ser conscientes que al final del proceso de instrucción el conocimiento construido por cada alumno será siempre parcial y dependerá del contexto institucional, material y temporal en que tiene lugar el proceso[3].

Si queremos que los alumnos adquieran competencia y comprensión sobre los distintos componentes de un contenido matemático, debemos tener en cuenta dichos componentes al planificar y llevar a cabo la enseñanza. Para ello el investigador francés Brousseau propuso diseñar situaciones didácticas de diversos tipos:

- *Acción,* en donde el alumno explora y trata de resolver problemas; como consecuencia construirá o adquirirá nuevos conocimientos matemáticos; las situaciones de acción deben estar basadas en problemas genuinos que atraigan el interés de los alumnos, para que deseen resolverlos; deben ofrecer la oportunidad de investigar por sí mismos posibles soluciones, bien individualmente o en pequeños grupos.
- *Formulación/ comunicación*, cuando el alumno pone por escrito sus soluciones y las comunicar a otros niños o al profesor; esto le permite ejercitar el lenguaje matemático.
- *Validación,* donde debe probar que sus soluciones son correctas y desarrollar su capacidad de argumentación.
- *Institucionalización,* donde se pone en común lo aprendido, se fijan y comparten las definiciones y las maneras de expresar las propiedades matemáticas estudiadas.

El tipo de discurso -comunicación oral o escrita- del profesor y los alumnos es un aspecto determinante de lo que los alumnos aprenden sobre matemáticas. Si sólo hay comunicación del profesor hacia los alumnos, en una enseñanza expositiva, a lo más con apoyo de la pizarra, los alumnos aprenderán unas matemáticas distintas, y adquirirán una visión diferente de las matemáticas, que si el profesor les anima a que comuniquen sus ideas a otros niños y al profesor.

22. Se da a una pareja de niños nueve fichas cuadradas del mismo tamaño, con la siguiente consigna:

Buscad la manera de unir las nueve fichas cuadradas para formar el polígono que tenga el menor perímetro posible. Busca también el polígono con el mayor perímetro posible.

¿Qué tipo de situación didáctica se plantea? ¿Cuál es el conocimiento que se adquiere al resolver la tarea? ¿Piensas que puede variar la dificultad si sólo damos al niño una hoja de

[3] Al reconocer la complejidad del conocimiento matemático, no podremos concebir competencia y comprensión como estados dicotómicos – un niño es o no competente, comprende o no comprende un tema matemático-. La competencia y comprensión son crecientes y progresivas a lo largo del aprendizaje.

> papel y un lápiz? ¿Y si la hoja es cuadriculada? ¿Cómo se podría completar la tarea si queremos que aparezcan los cuatro tipos de situaciones: acción, formulación, validación e institucionalización?

5. NORMAS SOCIOMATEMÁTICAS. CONTRATO DIDÁCTICO

La clase de matemáticas está con frecuencia regida por "obligaciones" o normas no explícitas entre el profesor y los alumnos. Estas "normas sociales" guían la colaboración de los alumnos, y sus obligaciones, así como su forma de reaccionar ante un error o una indicación del profesor.

Ejemplos

Los niños suponen que han de ser críticos hacia las afirmaciones, tanto propias como de otros niños.

Se espera del alumno que explique las soluciones de los problemas que el profesor le propone.

El profesor es quien pone los exámenes. Los alumnos aceptan la calificación del profesor.

Estas normas determinan un *microcultura* del aula y tienen las siguientes características:

- Algunas son generales y se pueden aplicar a cualquier disciplina.
- Regulan el funcionamiento de las actividades docentes y discentes.

Llamamos *contrato pedagógico* al conjunto de estas normas que no están ligadas a una disciplina específica. Otras normas son específicas de la actividad matemática, regulan, por ejemplo, las argumentaciones matemáticas e influyen en las oportunidades de aprendizaje.

Ejemplos:

Hay un acuerdo sobre lo que es "matemáticamente diferente", o "matemáticamente relevante " en el aula. Así, cuando esperamos que el niño resuelva un problema de forma aritmética y uno de los alumnos idea una solución original y completamente inesperada

También hay un convenio implícito sobre lo que es "matemáticamente eficiente", "matemáticamente elegante", o "matemáticamente aceptable".

En didáctica de las matemáticas se habla de *contrato didáctico* para describir y explicar las obligaciones o normas no explícitas que rigen las interacciones entre el profesor y los alumnos en el aula de matemáticas (en general de una disciplina específica). El "contrato didáctico" regula los derechos y obligaciones del profesor y los alumnos. Es el resultado de un proceso de negociación entre los alumnos, el profesor y el medio educativo. Uno de los componentes esenciales del contrato didáctico son los criterios de evaluación explícitos, pero hay otros no explicitados que sólo se detectan cuando el profesor plantea actividades poco habituales que vulneran las reglas del contrato, lo cual produce el consiguiente desconcierto en los alumnos. Los alumnos, en su adaptación al medio escolar, llegan a desarrollar un sentido que les permite captar cuáles son las reglas del contrato didáctico en cada caso.

La importancia de los fenómenos de contrato didáctico se debe a que condicionan de manera determinante el tipo de aprendizaje. La actitud del profesor determina con frecuencia de manera inconsciente las relaciones de los alumnos con la matemática. Por ejemplo:

- actitud de espera de la explicación del profesor,

- interés en investigar la situación,
- control de los resultados, por parte de los alumnos.

Si el profesor quiere, por ejemplo, fomentar la iniciativa del alumno puede optar por no incorporar indicaciones sobre la solución al presentar un problema. Este es un ejemplo de una *ruptura* del "contrato" habitual, ya que se supone que el profesor "sabe la solución", y su función como profesor debería ser "enseñar" ese conocimiento.

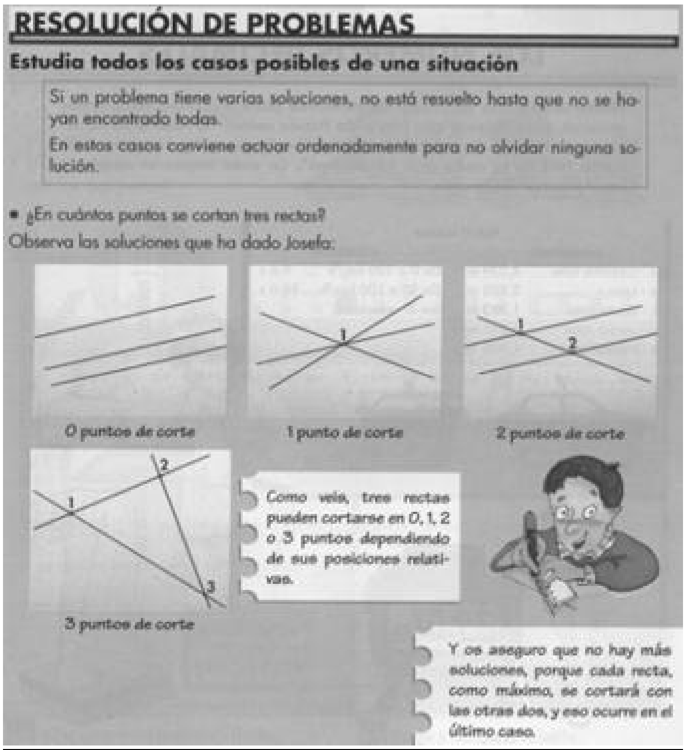
23. Analiza esta página de un texto de primaria.

¿Por qué no podemos hablar aquí de situación problemática, propiamente dicha?

¿Piensas que es frecuente este tipo de situaciones en los libros de texto?

¿Y en la clase de matemáticas?

¿Qué habría que cambiar en la situación para convertirla en un verdadero problema?


RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Estudia todos los casos posibles de una situación

Si un problema tiene varias soluciones, no está resuelto hasta que no se hayan encontrado todas.

En estos casos conviene actuar ordenadamente para no olvidar ninguna solución.

- ¿En cuántos puntos se cortan tres rectas?

Observa las soluciones que ha dado Josefa:

0 puntos de corte

1 punto de corte

2 puntos de corte

3 puntos de corte

Como veis, tres rectas pueden cortarse en 0, 1, 2 o 3 puntos dependiendo de sus posiciones relativas.

Y os aseguro que no hay más soluciones, porque cada recta, como máximo, se cortará con las otras dos, y eso ocurre en el último caso.

6. DIFICULTADES, ERRORES Y OBSTÁCULOS

Todas las teorías sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas coinciden en la necesidad de identificar los errores de los alumnos en el proceso de aprendizaje, determinar sus causas y organizar la enseñanza teniendo en cuenta esa información. El profesor debe ser sensible a las ideas previas de los alumnos y utilizar las técnicas del conflicto cognitivo para lograr el progreso en el aprendizaje.

- Hablamos de *error* cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar.
- El término *dificultad* indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice de dificultad) es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja.

Las creencias del profesor sobre los errores de los alumnos dependen de sus propias concepciones sobre las matemáticas. Aquellos que no han tenido ocasión de conocer cómo se desarrollan las matemáticas, o no han realizado un cierto trabajo matemático piensan que hay que eliminar el error a toda costa. Cambiar su manera de pensar implica un cierto cambio en la relación de dicho profesor con respecto a la actividad matemática.

El modelo de aprendizaje es también determinante. En un aprendizaje conductista, el error tiene que ser corregido, mientras que es constitutivo del conocimiento en un aprendizaje de tipo constructivista.

Algunas causas de errores y dificultades son las siguientes:

1. Dificultades relacionadas con los contenidos matemáticos

La abstracción y generalización de las matemáticas es una posible causa de las dificultades de aprendizaje. El análisis del contenido matemático permite prever su grado de dificultad potencial e identificar las variables a tener en cuenta para facilitar su enseñanza.

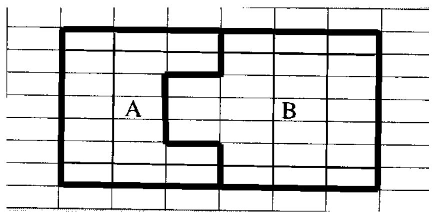
- A veces el error no se produce por una falta de conocimiento, sino porque el alumno usa un conocimiento que es válido en algunas circunstancias, pero no en otras en las cuales se aplica indebidamente. Decimos que existe un *obstáculo*. Con frecuencia el origen de los errores no es sencillo de identificar, aunque a veces se encuentran ciertos errores recurrentes, para los cuales la investigación didáctica aporta explicaciones y posibles maneras de afrontarlos.

Ejemplo

La ordenación de los números decimales 2'47 y 2'328 es una tarea para la que un alto porcentaje de alumnos dicen que 2'328 es mayor que 2'47, "porque 328 es mayor que 47". Los números decimales los están considerando como si fueran "dos números naturales separados por una coma", y comparan ambos números separadamente.

La identificación de tales obstáculos revela complejidades del significado de los objetos matemáticos que pueden pasar inadvertidas. La superación del obstáculo requiere que el alumno construya un significado personal del objeto en cuestión suficientemente rico, de manera que la práctica que es adecuada en un cierto contexto no se use en otro en el que no es válida. Parece razonable pensar que si un tipo de error se manifiesta en un cierto número de alumnos de manera persistente en una tarea, su origen se debe buscar en los conocimientos requeridos por la tarea, y no tanto en los propios alumnos.

Ejemplo[4]

En el ítem adjunto se obtienen habitualmente porcentajes de respuestas correctas bastante desiguales a las partes a) y b) (del orden del 90% a la a) y del 40% a la b). Alrededor del 40% de alumnos de 6º de primaria afirman que el perímetro de la región B es mayor que el de la A. Estos alumnos consideran que el área y el perímetro son magnitudes relacionadas de manera que varían en el mismo sentido. "A más área, mayor perímetro". Se ve sin dificultad que la parcela B es mayor que la A (área B > área A). Deducen de esto que el perímetro de B será mayor que el de A.	 Un terreno se ha dividido como se indica en la figura. Señalar en cada caso la respuesta que consideres correcta: a) - El área de la parcela A es la más grande - Las dos parcelas tienen igual área - El área de la parcela B es la más grande. b)- El perímetro de la parcela A es el mayor - Las dos parcelas tienen el mismo perímetro - El perímetro de la parcela B es el mayor.

2. Dificultades causadas por la secuencia de actividades propuestas

Se puede dar el caso de que la propuesta de actividades que presenta el profesor a los alumnos no sea potencialmente significativa, por causas diferentes:

a) Cuando el profesor no estructura bien los contenidos que quiere enseñar.
b) Cuando los materiales que ha escogido, como por ejemplo los libros de texto, no son claros -ejercicios y problemas confusos, mal graduados, rutinarios y repetitivos, errores de edición, etc.
c) Cuando la presentación del tema que hace el profesor no es clara ni está bien organizada -no se le entiende cuando habla, habla demasiado rápido, la utilización de la pizarra es caótica, no pone suficiente énfasis en los conceptos clave del tema, etc.

El profesor debe analizar las características de las situaciones didácticas sobre las cuales puede actuar, y su elección afecta al tipo de estrategias que pueden implementar los estudiantes, conocimientos requeridos, etc. Estas características suelen denominarse *variables didácticas* y pueden ser relativas al enunciado de los problemas o tareas, o también a la organización de la situación (trabajo individual, en grupo, etc.).

La edad de los alumnos o sus conocimientos previos influyen sobre el éxito de una tarea. Pero sobre estas variable poco o nada puede hacer el profesor en el momento en que gestiona la situación. En consecuencia, no se trata de variables didácticas.

Ejemplo

En un problema del tipo, "Juan tenía 69 bolas, gana 2. ¿Cuántas bolas tiene ahora?" los valores numéricos elegidos permiten que el alumno encuentre la solución con la estrategia simple del recuento (69, 70, 71). Si cambia el enunciado de manera que en lugar de ganar 2

[4] Briand, J. y Chevalier, M.C (1995). *Les enjeux didactiques dans l'ensignement des mathématiques*. Paris: Hatier.

bolas, gana 28, el recuento es una técnica poco eficaz, por lo que el alumno probablemente se verá forzado a usar otros procedimientos.

3. Dificultades que se originan en la organización del centro.

En ocasiones el horario del curso es inapropiado, el número de alumnos es demasiado grande, no se dispone de materiales o recursos didácticos, etc.

4. Dificultades relacionadas con la motivación del alumnado

Puede ocurrir que las actividades propuestas por el profesorado a los alumnos sean potencialmente significativas y que la metodología sea la adecuada, pero que el alumnado no esté en condiciones de hacerlas suyas porque no esté motivado. Este tipo de dificultades está relacionado con la autoestima y la historia escolar del alumno.

5. Dificultades relacionadas con el desarrollo psicológico de los alumnos

Una fuente de dificultades de aprendizaje de los alumnos de primaria hay que buscarla en el hecho de que algunos alumnos aún no han superado la etapa preoperatoria (teoría de Piaget) y realizan operaciones concretas, o bien que aquellos que aún están en la etapa de las operaciones concretas realicen operaciones formales. En la planificación a largo plazo del currículo habrá que tener en cuenta dos aspectos fundamentales:

- Cuáles de los objetivos del área de matemáticas corresponde a la etapa preoperatoria, cuáles a la de las operaciones concretas y cuáles a la de las operaciones formales
- Precisar las edades en que los alumnos pasan aproximadamente de una etapa a la otra.

Ejemplo:

Una de las maneras más habituales para introducir la fórmula de la longitud de una circunferencia en primaria consiste en hacer medir a los alumnos diferentes longitudes y diámetros de objetos circulares como platos, monedas, etc. para que comprueben que el cociente entre la longitud y el diámetro siempre es el mismo y que aproximadamente es 3,14. Para ello, los alumnos pueden rodear con una cuerda el perímetro del plato y luego extenderla sobre una regla para medirla. Si algún alumno no está en la etapa operatoria puede no entender que la longitud de la cuerda no varía al extenderla sobre la regla

6. Dificultades relacionadas con la falta de dominio de los contenidos anteriores

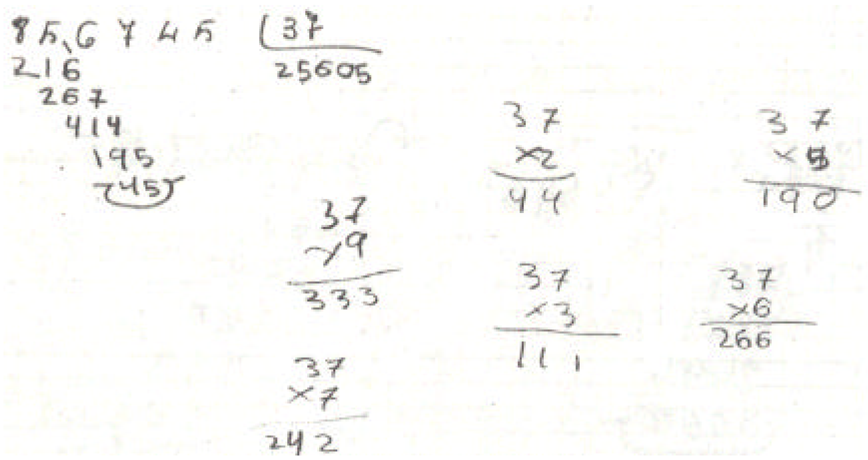
Puede ocurrir que el alumno, a pesar de tener un nivel evolutivo adecuado, no tenga los conocimientos previos necesarios para poder aprender el nuevo contenido, y, por tanto, la "distancia" entre el nuevo contenido y lo que sabe el alumno no es la adecuada. La evaluación inicial puede detectar los contenidos previos que hay que adquirir para conseguir el aprendizaje del contenido previsto.

Ejemplo: Un alumno con dificultades en el algoritmo de la resta es de esperar que tenga dificultades con el algoritmo de la división.

24. En una clase de 6º de primaria el maestro no ha dado ninguna justificación de la fórmula de la longitud de una circunferencia ni de la fórmula del área del círculo. ¿Qué tipo de error podemos esperar de sus alumnos?

25. De acuerdo con el esquema propuesto en el apartado 6 encuentra una explicación para las siguientes respuestas:

a)[5]



b) El alumno renuncia a todo tipo de reacción mostrando una actitud de indiferencia, falta de atención y aparente pereza.

7. ESTÁNDARES PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Al reflexionar sobre qué caracteriza a un buen profesor de matemáticas o sobre cómo conducir una clase de matemáticas, es útil analizar algunos documentos preparados sobre esta problemática por asociaciones de profesores. Una de estas asociaciones, de gran prestigio, que incluye también investigadores en educación matemática es el National Council of Teachers of Mathematics (N.C.T.M).

Dicha asociación elaboró en 1991 un documento titulado *Estándares profesionales para la enseñanza de las matemáticas* (N.C.T.M. 1991) con el fin de que fuese una referencia para orientar la labor de los profesores de matemáticas en la década de los 90. A continuación sintetizamos dicho documento.

7.1. Supuestos de los estándares

1. El fin de la enseñanza de las matemáticas es ayudar a los estudiantes a desarrollar su capacidad matemática:

El currículo matemático propuesto en los "Estándares" trata de fomentar el razonamiento matemático, la comunicación, la resolución de problemas y el establecimiento de conexiones entre las distintas partes de las matemáticas y las restantes disciplinas. Para ello se sugiere que:

- Los profesores deben ayudar a cada estudiante para que desarrolle su comprensión

[5] Fernández, Llopis y Pablo (1985). Niños con dificultades para las matemáticas. Madrid:CEPE.

conceptual y procedimental de cada núcleo conceptual matemático: números, operaciones, geometría, medición, estadística, probabilidad, funciones y álgebra y los relacione entre sí.

- Deben tratar de que todos los estudiantes formulen y resuelvan una amplia variedad de problemas, hagan conjeturas, den argumentos, validen soluciones, y evalúen si las afirmaciones matemáticas son o no plausibles.
- Deben estimular la disposición de los estudiantes para usar e interesarse por las matemáticas, para apreciar su belleza y utilidad, y comprender a los que se quedan atascados o despistados.
- Deben ayudar a los estudiantes a reconocer que en el trabajo matemático llegamos a veces a callejones sin salida y animarles a perseverar cuando se enfrentan con problemas intrincados, así como a desarrollar auto confianza e interés.

2. Lo que los estudiantes aprenden está fundamentalmente conectado con el cómo lo aprenden

Las oportunidades de los estudiantes para aprender matemáticas dependen del entorno y del tipo de tareas y discurso en que participan. Lo que los estudiantes aprenden -sobre conceptos y procedimientos particulares así como su capacidad de razonamiento - depende de cómo se implican en la actividad en clase de matemáticas. Su actitud hacia las matemáticas también queda marcada por tales experiencias. Por consiguiente, hemos de cuidar no sólo el currículo, sino también la metodología de enseñanza si queremos desarrollar la capacidad matemática de los estudiantes.

3. Todos los estudiantes pueden aprender a pensar matemáticamente

Cada estudiante puede -y debe- aprender a razonar y resolver problemas, hacer conexiones a través de una rica red de tópicos y experiencias, y a comunicar ideas matemáticas. Aunque los objetivos tales como hacer conjeturas, argumentar sobre las matemáticas usando la evidencia matemática, formular y resolver problemas parezcan complejos, no están destinados sólo a los chicos "brillantes" o "capaces matemáticamente".

4. La enseñanza es una práctica compleja y por tanto no reducible a recetas o prescripciones

La enseñanza de las matemáticas se apoya en el conocimiento de varios dominios:

- conocimiento general de las matemáticas,
- de cómo los estudiantes aprenden matemáticas en general,
- del contexto de la clase, la escuela y la sociedad,
- la enseñanza es específica del contexto.

Ejemplo

El conocimiento teórico general sobre el desarrollo del adolescente, puede sólo parcialmente informar una decisión sobre estudiantes particulares aprendiendo un concepto matemático particular en un contexto dado.

Los profesores combinan el conocimiento procedente de estos dominios diferentes para decidir cómo responder a la pregunta de un estudiante, cómo representar una idea matemática particular, hasta cuándo proseguir con la discusión de un problema, o qué tarea usar para introducir a los estudiantes en un tópico nuevo. Estas decisiones dependen de una variedad de factores antes los cuales el profesor debe encontrar un equilibrio.

> 26. ¿Por qué enseñar bien las matemáticas es un compromiso complejo, que no se puede reducir a un conjunto de recetas?.

La buena enseñanza depende de una serie de consideraciones y demanda que los profesores razonen de un modo profesional dentro de contextos particulares de trabajo. Los estándares para la enseñanza de las matemáticas están diseñados como una ayuda en tales razonamientos y decisiones resaltando aspectos cruciales para la creación del tipo de prácticas de enseñanza que apoyan los objetivos de aprendizaje. Se agrupan en cuatro categorías: *tareas*, *discurso del profesor y de los estudiantes*, *entorno* y *análisis*.

7.2. Tareas

Las tareas en que se implican los estudiantes - proyectos, problemas, construcciones, aplicaciones, ejercicios, etc. - y los materiales con los que trabajan enmarcan y centran sus oportunidades para aprender las matemáticas en la escuela. Dichas tareas:

- Proporcionan el estímulo para que los estudiantes piensen sobre conceptos y procedimientos particulares, sus conexiones con otras ideas matemáticas, y sus aplicaciones a contextos del mundo real.
- Pueden ayudar a los estudiantes a desarrollar destrezas en el contexto de su utilidad.
- Expresan lo que son las matemáticas y lo que implica la actividad matemática. Pueden dar una visión de las matemáticas como un dominio de indagación valioso y atrayente.
- Requieren que los estudiantes razonen y comuniquen matemáticamente y promueven su capacidad para resolver problemas y para hacer conexiones.

Una responsabilidad central del profesor consiste en seleccionar y desarrollar tareas valiosas y materiales que creen oportunidades para que los estudiantes desarrollen su comprensión matemática, competencias, intereses y disposiciones.

> 27. En un grupo de alumnos de primaria, el profesor quiere trabajar las diferentes unidades de medida de longitud. Compara los dos tipos de tarea siguientes, desde el punto de vista de las oportunidades que proporcionan para aprender matemáticas.
>
> a. Realizar ejercicios de transformación y cálculo con diferentes unidades de medida, por ejemplo, pasando de metros a centímetros o sumando medidas expresadas en diferentes unidades y transformándolas a una unidad común.
>
> b. Se da a los alumnos reglas de 30 cm. de longitud y se les pide medir el perímetro de la clase. Los alumnos pueden usar si desean técnicas auxiliares, por ejemplo, contar el número de pasos que hay que dar alrededor de la clase, contar el número de baldosas cuadradas completas a lo largo del perímetro, midiendo los trozos de baldosas no completas, usar un carrete de hilo como ayuda, etc. El profesor no da indicaciones sobre cómo trabajar, aunque proporciona los recursos necesarios. Finalizada la tarea se produce una comparación de estrategias y soluciones.

7.3. Discurso

El discurso de una clase - los modos de representar, pensar, hablar, ponerse de acuerdo o en desacuerdo- es central para que los estudiantes comprendan que las matemáticas como un dominio de investigación humana con modos característicos de conocimiento.

El discurso incluye el modo en que las ideas son intercambiadas y lo que implican las ideas: Es conformado por las tareas en las que los estudiantes se comprometen y la naturaleza del entorno de aprendizaje; también influye sobre las mismas.

28. Da una lista de todos los tipos de actividades en un aula de matemáticas que puedan considerarse como parte del discurso. ¿Quién habla?, ¿Sobre qué?, ¿De qué manera? ¿Qué escriben las personas, qué registran y por qué? ¿Qué cuestiones son importantes? ¿Cómo se intercambian las ideas? ¿Qué ideas y modos de pensamiento son valorados? ¿Quién determina cuándo finalizar una discusión?

7.4. Entorno

El profesor de matemáticas es responsable de crear un entorno intelectual en que la norma consista en un serio compromiso hacia el pensamiento matemático, para que el entorno de la clase sea el fundamento de lo que los alumnos aprenden. Mas que un entorno físico, con bancos, cuadernos y posters, el entorno de la clase forma un currículo oculto con mensajes sobre lo que cuenta en el aprendizaje y la actividad matemática: ¿Pulcritud?, ¿Velocidad?, ¿Precisión? ¿Escuchar bien? ¿Ser capaz de justificar una solución? ¿Trabajar independientemente? Si deseamos que los estudiantes aprendan a hacer conjeturas, experimenten con aproximaciones alternativas para resolver problemas, y construir y responder a los argumentos de los demás, entonces la creación de un entorno que estimule este tipo de actividades es esencial.

7.5. Análisis

Los profesores deben ser responsables de analizar su práctica docente, para intentar comprender tanto como sea posible los efectos de la clase de matemáticas sobre cada estudiante. El profesor debe llevar un registro sobre su clase usando una variedad de estrategias y centrando la atención sobre una amplia matriz de dimensiones de la competencia matemática, como se indica en los Estándares de Currículo y Evaluación de las Matemáticas Escolares. Lo que los profesores aprenden de esto debería ser una fuente primaria de información para la planificación y mejora de la instrucción tanto a corto como a largo plazo. Algunas posibles preguntas son:

- ¿Uso buenas tareas, es decuado el discurso y el entorno de trabajo para estimular el desarrollo de la capacidad y el conocimiento matemático de los estudiantes?
- ¿Qué parecen comprender bien los estudiantes, y qué sólo parcialmente? ¿
- Qué conexiones parece que están haciendo?
- ¿Qué disposición matemática parecen que están desarrollando?
- ¿Cómo trabaja el grupo conjuntamente como una comunidad de aprendizaje dando sentido a las matemáticas?

C: Seminario didáctico

1. ANÁLISIS DE DOCUMENTOS CURRICULARES

El anexo 2.1. contiene el enunciado del conjunto de normas o criterios para el logro de una enseñanza eficaz de las matemáticas según el NCTM 91. Estudia con detenimiento cada uno de dichos estándares y contrástalos con las orientaciones metodológicas indicadas en los currículos españoles (estatal y autonómico), así como con las indicaciones sobre el estudio dirigido de las matemáticas incluidas en este capítulo.

2. REFLEXIÓN, REDACCIÓN Y DISCUSIÓN

Para las siguientes afirmaciones[6] expresa tu grado de acuerdo y explica las posibles razones de tu acuerdo o desacuerdo. Clasifícalas según las personas o instituciones que suelen manifestarlas.

a) Todos los niños pueden aprender matemáticas
b) Las matemáticas son muy difíciles
c) Las matemáticas son muy abstractas
d) Con tantos alumnos por clase es muy difícil dar clase
e) Los alumnos vienen mal preparados de los cursos anteriores
f) No están motivados para estudiar
g) Lo más importante es que el profesor domine la materia
h) Los profesores de primaria tienen pocos conocimientos de matemáticas
i) A este alumno le cuesta mucho
j) Me han puesto las clases a unas horas en las que es imposible explicar nada
k) A mí las matemáticas nunca me han ido bien / me cuestan mucho
l) Lo sabía pero en el examen me pongo nervioso y lo hago todo mal
m) No sirvo para las matemáticas
n) Este profesor se explica muy mal
o) Este alumno no hace nada pero no molesta, en cambio este, además de no hacer nada, distorsiona la clase
p) Cuando se explicó este tema yo estaba enfermo
q) Le faltan los conocimientos previos
r) Cuando yo estudiaba tampoco entendía las matemáticas

3. ENCUESTA DE ACTITUDES DE LOS ALUMNOS

Plantea algunas preguntas a una pequeña muestra de niños para conocer sus actitudes y percepción de las matemáticas[7]. Por ejemplo,

-¿Qué asignatura te gusta más? ¿Se te da bien?

---

[6] Font, V (1998). Classificació de les dificultats d'aprenentatge dels continguts matemàtics. *Actes de les 3es Jornades de Didàctica de les Matemàtiques*. (pp. 41-50). Ed. Associació de Professors de Matemàtiques de les Comarques Meridionals. Reus

[7] Reys, R. E. y cols (2001). Helping children learn mathemtics. New York: John Wiley. (p. 24)

-¿Crees que saber matemáticas te ayudará cuando seas mayor? ¿Por qué?
-Si te digo, "Vamos a hacer matemáticas". ¿Qué harías?
-¿Crees que a tu profesor le gusta enseñar matemáticas? Dime por qué.

4. ERRORES Y OBSTÁCULOS

1. Encuentra una explicación para las siguientes respuestas de un alumno a estas tres sustracciones:

$$\begin{array}{r} 287 \\ -\ 75 \\ \hline 212 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 369 \\ -\ 295 \\ \hline 134 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1528 \\ -\ 233 \\ \hline 1315 \end{array}$$

2. Algunos alumnos resuelven tareas aritméticas aplicando las siguientes reglas de su propia invención:
   1. No se puede dividir *a* por *b* a menos que *a* sea mayor que b.
   2. No se puede restar *a* de b a menos que *a* sea menor que *b*.
   3. Cuando se multiplican dos números, el resultado es mayor que ambos números.
   4. Cuando se suman dos números, el resultado es mayor que cada uno de los sumandos.
   5. Para hacer una adición en columna, se "alinean" las cifras a la derecha.

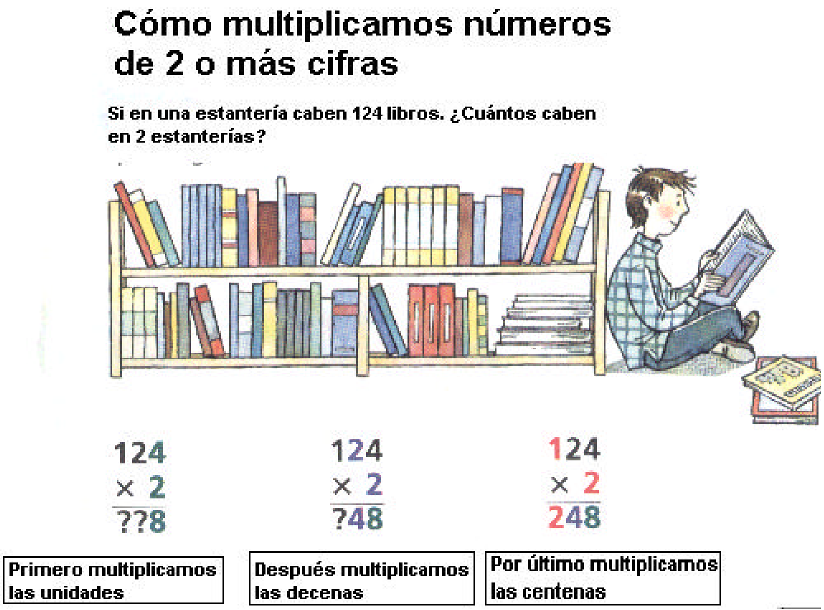
Determina el campo de validez de cada una de estas reglas.

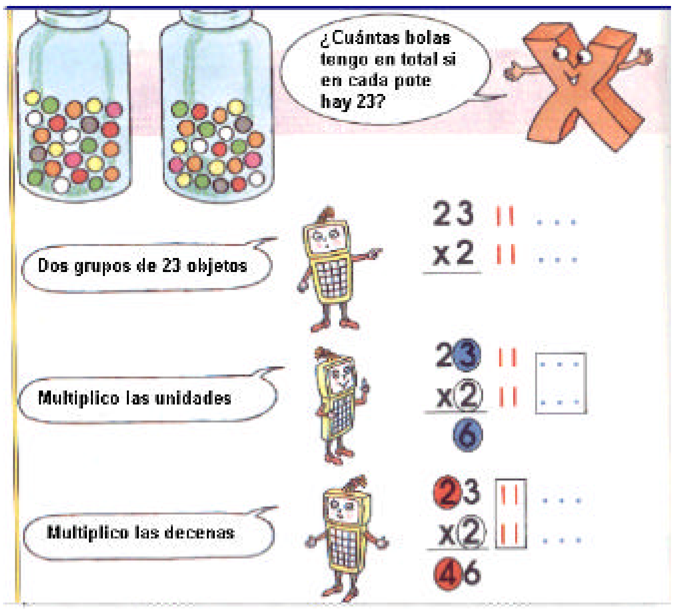
5. DISEÑO DE ACTIVIDADES

Elige un contenido matemático para un nivel determinado de primaria (números, geometría, datos). Enunciar al menos un problema para ese tema que se pueda resolver usando las técnicas: buscar un patrón, hacer un dibujo o diagrama, y construir una tabla.

6. ANÁLISIS DE TEXTOS

A continuación tienes dos explicaciones que tienen por objetivo introducir la multiplicación en 3º de primaria. Compáralas y di cuál crees que es la que potencialmente es más significativa. Justifica tu respuesta.





ANEXO 2.1:

ESTANDARES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS (NCTM, 1991)

ESTÁNDAR 1: *TAREAS MATEMÁTICAS VALIOSAS*

El profesor de matemáticas debería plantear tareas que estén basadas en:

* unas matemáticas significativas y razonables;

* el conocimiento de los intereses, experiencias y comprensión de los estudiantes;

* el conocimiento de los distintos modos en que aprenden los alumnos: y que

* comprometa el intelecto de los estudiantes;

* desarrolle la comprensión y destrezas matemáticas de los estudiantes;

* estimule a los estudiantes a hacer conexiones y a desarrollar un marco coherente para las ideas matemáticas;

* exija la formulación y resolución de problemas y el razonamiento matemático;

* promueva la comunicación sobre las matemáticas;

* presente las matemáticas como una actividad humana en desarrollo;

* muestre sensibilidad y tenga en cuenta las diversas disposiciones y experiencias previas de los estudiantes;

* promueva el desarrollo de las disposiciones para hacer matemáticas de los estudiantes.

ESTÁNDAR 2: *EL PAPEL DEL PROFESOR EN EL DISCURSO*

El profesor de matemáticas debería organizar el discurso mediante

* el planteamiento de cuestiones y tareas que pongan de manifiesto, comprometan y desafíen el pensamiento de cada estudiante;

* escuchar cuidadosamente las ideas de los estudiantes;

* pidiendo a los estudiantes que clarifiquen y justifiquen sus ideas oralmente y por escrito;

* decidiendo cuáles ideas de las que los estudiantes afloran durante una discusión se van a tratar con detalle;

* decidiendo cuando y cómo asociar una notación y el lenguaje matemático a las ideas de los estudiantes;

* decidir cuando proporcionar una información, cuando clarificar una cuestión, cuando modelizar, cuando llevar el protagonismo, y cuando dejar al estudiante luchar contra una dificultad;

* registrar la participación de cada estudiante en las discusiones y decidir cuando y como animar a cada estudiante a participar.

ESTÁNDAR 3: *EL PAPEL DEL ESTUDIANTE EN EL DISCURSO*

El profesor de matemática debería promover un discurso de la clase en el que los estudiantes -

* escuchen, respondan y pregunten al profesor y unos a otros;

* usen una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos;

* plantear problemas y cuestiones;

* hacer conjeturas y presentar soluciones;

* explorar ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar;

* tratar de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de representaciones particulares, soluciones, conjeturas y respuestas;

* apoyarse en la evidencia y los argumentos matemáticos para determinar la validez.

ESTÁNDAR 4: *INSTRUMENTOS PARA ESTIMULAR EL DISCURSO*

El profesor de matemáticas, con objeto de estimular el discurso, debería promover y aceptar el uso de -

* ordenadores, calculadoras y demás tecnología;

* materiales concretos usados como modelos;

* dibujos, diagramas, tablas y gráficas;

* términos y símbolos inventados y convencionales;

* metáforas, analogías y relatos;

* hipótesis, explicaciones y argumentos escritos;

* presentaciones orales y dramatizaciones.

ESTÁNDAR 5: *ENTORNO DE APRENDIZAJE*

El profesor de matemáticas debería crear un entorno de aprendizaje que estimule el desarrollo de la capacidad matemática de cada estudiante:

* proporcionando y estructurando el tiempo necesario para que exploren unas matemáticas adecuadas y que intenten resolver problemas e ideas significativas;

* usando el espacio físico y los materiales de modo que faciliten el aprendizaje matemático por los estudiantes;

* proporcionando un contexto que estimule el desarrollo de las destrezas y eficiencia matemática;

* respetando y valorando las ideas de los estudiantes, modos de pensamiento y disposición hacia las matemáticas;

y mediante la animación consistente de los estudiantes para -

* trabajar independientemente y en colaboración para dar sentido a las matemáticas;

* asumir riesgos intelectuales mediante el planteamiento de cuestiones y formulando conjeturas;

* mostrar competencia matemática mediante la validación y el apoyo de ideas matemáticas con argumentos matemáticos.

ESTÁNDAR 6: *ANÁLISIS DE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE*

El profesor de matemáticas debería comprometerse en el análisis progresivo de la enseñanza y el aprendizaje sabiendo –

* observar, escuchar y reunir información sobre los estudiantes para evaluar lo que están aprendiendo;

* examinar los efectos de las tareas, el discurso, y el entorno del aprendizaje sobre el conocimiento de los estudiantes, sus destrezas y actitudes;

en orden a -

* asegurar que cada estudiante está aprendiendo unas matemáticas adecuadas y significativas y que está desarrollando una disposición positiva hacia las matemáticas;

* desafiar y extender las ideas de los estudiantes;

* adaptar o cambiar las actividades durante la enseñanza;

* hacer planes, tanto a corto como a largo plazo;

* describir y comentar sobre el aprendizaje de cada estudiante con los padres, directores, así como con los propios estudiantes.

BIBLIOGRAFÍA

Baroody, A. J. (1988). *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid: Visor/MEC.

Brousseau, G. (1988). Utilidad e interés de la didáctica para un profesor. *Suma,* 4: 5-12 y *Suma* 5: 5-12 (segunda parte).

Flores, P. (2001). Aprendizaje y evaluación. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 41-59). Madrid: Síntesis.

Font, V (1994). Motivación y dificultades de aprendizaje en matemáticas. *Suma*, 17: 10-16

Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

Capítulo 3

CURRÍCULO MATEMÁTICO PARA LA EDUCACIÓN PRIMARIA

A: Contextualización

REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN SOBRE LAS ORIENTACIONES CURRICULARES

Consigna:

A continuación se presenta un extracto del Decreto de Currículo de Educación Primaria, para el área de Matemáticas.

1) Léelo con atención. Subraya los puntos que consideras especialmente acertados.

2) ¿Cómo se contempla el aprendizaje de las matemáticas?

3) ¿Se da prioridad a unas matemáticas ligadas a la experiencia, integradoras y funcionales, y se tienen en cuenta las características personales, sociales y psicológicas del alumnado?.

4) Si no estás de acuerdo con alguno de los enunciados, indica tus razones.

Las matemáticas en la Educación Primaria (Decreto de Primaria, MEC)

Las consideraciones precedentes sobre el conocimiento matemático y sobre el papel que juega en el desarrollo global de los alumnos muestran hasta qué punto las contribuciones de esta área son decisivas para alcanzar los Objetivos Generales de la Educación Primaria. En efecto, mediante el aprendizaje de las matemáticas los alumnos desarrollan su capacidad de pensamiento y de reflexión lógica, y adquieren un conjunto de instrumentos poderosísimos para explorar la realidad, para representarla, explicarla y predecirla, en suma, para actuar en y sobre ella.

Tradicionalmente, la enseñanza de las matemáticas en la Educación Primaria ha estado fuertemente determinada por dos tipos de reflexiones: las relativas al nivel de desarrollo intelectual y de competencia cognitiva de los alumnos y las relativas a la estructura interna del conocimiento matemático. Respecto a las segundas, se ha subrayado sobre todo que las matemáticas no son un conjunto de elementos desconectados, sino que poseen una estructura interna, con una fuerte componente jerárquica entre sus partes, que impone una determinada secuencia temporal en el aprendizaje. De este modo, la estructura interna del saber matemático se ha convertido a menudo en el punto de referencia único para la selección, organización y secuenciación de los contenidos de aprendizaje en la Educación Primaria.

Esta manera de proceder ignora la diferencia, esencial desde el punto de vista pedagógico, entre, por una parte, las características del saber matemático en un estado avanzado de elaboración y, por otra, el proceso de construcción del conocimiento matemático. Como ya se ha mencionado, la formalización, el rigor, la coherencia, la ausencia de ambigüedad y las otras características del conocimiento matemático no son el punto de partida, sino más bien el punto de llegada de un largo proceso de construcción. Es en este sentido que la elección de la estructura interna del saber matemático como único punto de referencia para la selección, organización y secuenciación de los contenidos del aprendizaje no parece una opción adecuada, siendo necesario introducir igualmente criterios relativos a la naturaleza del propio proceso de construcción.

Algo similar cabe decir en cuanto a las consideraciones relativas al nivel de desarrollo intelectual y de competencia cognitiva de los alumnos. En la medida en que el aprendizaje de las matemáticas se entienda como la apropiación por parte de los alumnos de un saber constituido y acabado, es evidente que su capacidad para asimilar y aprehender la estructura interna de dicho saber condicionará la posibilidad misma de llevar a cabo el aprendizaje. Por el contrario, si el aprendizaje de las matemáticas se contempla, como es el caso en este Diseño Curricular Base, como un proceso de construcción y de abstracción de relaciones, progresivamente más complejas, elaboradas en y a partir de la actividad del alumno, entonces las características psicoevolutivas de los alumnos, sin dejar de jugar un papel esencial, difícilmente podrán ser consideradas como el punto de referencia único para la selección, organización y secuenciación de los contenidos del aprendizaje. En efecto, buena parte de los conceptos y procedimientos matemáticos que, por su grado de formalización, abstracción y complejidad, escapan a las posibilidades de comprensión de los alumnos hasta bien entrada la adolescencia, aparecen sin embargo de forma intuitiva y práctica en las actividades escolares y extraescolares de los alumnos de la Educación Primaria convirtiéndose, de este modo, en objeto de atención preferente de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en esta etapa educativa.

De lo dicho hasta aquí se infiere que, en la Educación Primaria, el proceso de construcción del conocimiento matemático debe utilizar como punto de partida la propia experiencia práctica de los alumnos. Las relaciones entre las propiedades de los objetos y de las situaciones que los alumnos establecen de forma intuitiva en el transcurso de sus actividades pueden convertirse en objeto de reflexión dando paso, de este modo, a las primeras experiencias específicamente matemáticas. En un primer momento, estas experiencias matemáticas serán de una naturaleza esencialmente intuitiva y estarán vinculadas a la manipulación de objetos concretos y a la actuación en situaciones particulares.

Conviene tener presente, sin embargo, que la experiencia práctica sólo constituye un punto de partida -en el que será preciso detenerse en ocasiones durante períodos de tiempo ciertamente dilatados-, y que la construcción del conocimiento matemático obliga a una abstracción y una formalización crecientes. Quiere esto decir que la experiencia práctica y la comprensión intuitiva de nociones, relaciones y propiedades matemáticas ha de ir enriqueciéndose progresivamente con formas de representación (por ejemplo, dibujos, esquemas y otras formas de representación gráfica) que permitan trascender la manipulación concreta de objetos y situaciones hasta llegar, en último término, a una comprensión plena de las mismas mediante el manejo adecuado de las notaciones y operaciones simbólicas de tipo numérico, algebraico o geométrico.

Son muchos los conceptos y procedimientos matemáticos cuya comprensión plena en el sentido apuntado escapa a las posibilidades intelectuales de los alumnos de la Educación Primaria. Sin embargo, esto no implica, como ya se ha dicho, que deban excluirse necesariamente como objeto de aprendizaje. Por una parte, su introducción de forma más o menos intuitiva durante esta etapa permite iniciar el largo camino que lleva desde la reflexión sobre la propia actividad hasta los niveles más abstractos, formales y deductivos del conocimiento matemático. Por otra parte, mucho antes de que sea posible alcanzar su comprensión plena, algunos de estos conceptos y procedimientos (por ejemplo, sistema de numeración decimal, estrategias de conteo, operaciones aritméticas, unidades de medida, etc.) adquieren un valor instrumental que se corresponde plenamente con las necesidades e intereses de los alumnos de la Educación Primaria.

En cualquier caso, el hecho de tomar como punto de partida para la construcción del conocimiento matemático la propia experiencia y la reflexión sobre la misma con el fin de ir avanzando, progresivamente, hacia niveles más elevados de abstracción y de formalización posee importantes implicaciones para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Primaria. Sin menoscabo del desarrollo del que son objeto en el apartado de Orientaciones Didácticas y para la Evaluación, señalemos, por ejemplo, que el planteamiento expuesto aconseja:

- conceder prioridad al trabajo práctico y oral, introduciendo únicamente las actividades descontextualizadas y el trabajo escrito (utilización de notaciones simbólicas) cuando los alumnos muestren una comprensión de los conceptos matemáticos y un interés por los mismos;
- conceder prioridad al trabajo mental (y, en especial, al cálculo mental) con el fin de profundizar los conocimientos matemáticos intuitivos antes de pasar a su formalización;
- utilizar ampliamente actividades grupales de aprendizaje que favorezcan los intercambios, la discusión y la reflexión sobre las experiencias matemáticas;
- prestar especial atención al desarrollo de estrategias personales de resolución de problemas, potenciando la inclusión en las mismas de los conocimientos matemáticos que se vayan adquiriendo (representaciones gráficas y numéricas, registro de las alternativas exploradas, simplificación del problema,..);
- utilizar los distintos ámbitos de experiencia de los alumnos, escolares (otras áreas del currículo: conocimiento del medio, actividades físicas y deportivas, actividades artísticas, etc.) y extraescolares, como fuente de experiencias matemáticas.

B: Desarrollo de conocimientos

1. INTRODUCCIÓN

En la bibliografía encontramos diferentes interpretaciones del término *currículo*, así como diferentes formas de explicarlo y justificarlo (teorías curriculares) con las que ya estáis familiarizados por vuestros estudios de pedagogía.

En síntesis el currículo trata de establecer de manera razonada y para cada etapa educativa, qué enseñar y cómo en las distintas áreas de conocimiento. Los elementos que componen el currículum se pueden agrupar en torno a cuatro cuestiones: ¿Qué enseñar?, ¿Cuándo enseñar?, ¿Cómo enseñar?, y ¿Qué, cómo y cuándo evaluar?

En un sentido restringido el "currículo" se refiere a las directrices y documentos oficiales dirigidos a un nivel y contenido concreto. Las directrices curriculares oficiales, tanto a nivel nacional como de las comunidades autonómicas, establecen los fines generales de la educación matemática, los objetivos, contenidos y criterios de evaluación, pero a un nivel de generalidad que debe ser posteriormente desarrollado por los centros, seminarios y los propios profesores. Estos deberán tener una preparación adecuada para realizar la labor de desarrollo e implementación curricular.

En sentido amplio el currículo comprendería también el detalle de las acciones educativas específicas que se deben realizar en el aula para el logro de los objetivos, esto es, el plan operativo que detalla qué matemáticas necesitan conocer los alumnos, qué deben hacer los profesores para conseguir que sus alumnos desarrollen sus conocimientos matemáticos y cuál debe ser el contexto en el que tenga lugar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

El currículum se concreta en tres niveles: el primer nivel es el marco común elaborado por el Ministerio de Educación y Ciencia, que se completa con las aportaciones de la Comunidad Autónoma. El segundo nivel lo establece el equipo docente de cada centro marcando los objetivos básicos, la organización y coordinación de recursos. El tercer nivel está formado por las *programaciones de aula* con todos los elementos que esto conlleva.

En los capítulos 1 y 2 hemos descrito nuestros supuestos epistemológicos sobre la naturaleza de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. De ellos se derivan los siguientes supuestos pedagógicos sobre la elaboración de propuestas curriculares para la educación matemática:

1. El fin primordial del profesor en el aula es ayudar a sus alumnos a desarrollar el razonamiento matemático, su capacidad de formular y resolver problemas, de comunicar sus ideas matemáticas y relacionar las diferentes partes de las matemáticas entre sí y con las restantes disciplinas. Finalmente debe promover unas buenas actitudes en los alumnos hacia las matemáticas.
2. El profesor debe prestar una atención especial a la organización de la enseñanza y el aprendizaje: lo que los alumnos aprenden depende fundamentalmente de cómo se lleva a cabo este aprendizaje. Debe realizar una cuidadosa selección de las tareas y situaciones didácticas que proporcionen oportunidades a los alumnos de indagar problemas significativos para ellos y relevantes desde el punto de vista matemático,

formular hipótesis y conjeturas, utilizar diversos tipos de representaciones; validar sus soluciones y comunicarlas a otros, dentro de un clima cooperativo y científico.

3. Hay que llevar al alumno progresivamente a la construcción de una red de conceptos y procedimientos, y al dominio del lenguaje matemático, en consonancia con el conocimiento matemático objetivo. Con dicho fin se deben diseñar situaciones específicas de institucionalización de los conocimientos pretendidos.
4. El currículo debe ser flexible y adaptado a los distintos alumnos. Todos los niños deben alcanzar los objetivos de aprender a realizar conjeturas y argumentos, formular y resolver problemas. Para ello se deben proponer tareas sencillas sobre las que toda la clase puede trabajar, pero, además, se deben proporcionar actividades de desarrollo y sugerencias para los alumnos más capacitados.
5. La observación continuada de los procesos de enseñanza-aprendizaje debe ser la principal estrategia evaluadora de los mismos.

1. Compara el nivel de concreción que presentan los siguientes documentos para el bloque de contenidos "Números y operaciones": 1) El DCB, 2) El Proyecto curricular de una escuela que puedas conseguir, y 3) Un libro de texto de matemáticas de primaria.

2. ¿Por qué el currículo realmente implementado en el aula puede ser diferente del currículo oficial, contenido en las directrices curriculares e incluso diferente del currículo planificado por el mismo profesor? ¿Qué motivos pueden llevar al profesor a cambiar lo planificado?

El currículo matemático escolar tiene una fuerte incidencia sobre lo que los estudiantes tienen oportunidad de aprender y de lo que aprenden efectivamente:

- En un currículo coherente, las ideas matemáticas se presentan y vinculan de forma que permite progresar al conocimiento de los estudiantes y su capacidad de aplicar las matemáticas.
- Un currículo matemático efectivo se centra en las partes más importantes de las matemáticas –las que preparan a los estudiantes para sus estudios futuros y para resolver problemas en una variedad de situaciones, en la vida diaria y en el trabajo.
- Un currículo matemático bien articulado desafía a los estudiantes para que aprendan ideas matemáticas cada vez más sofisticadas a medida que continúan en sus estudios.

La Ley Orgánica 1/1990 de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE), determina, en su artículo cuarto, los elementos integrantes del currículo: los objetivos, contenidos, métodos y criterios de evaluación de cada uno de los niveles, etapas, ciclos, grados y modalidades en los que se organiza la práctica educativa. Dispone también que corresponde al Gobierno fijar los aspectos básicos del currículo o enseñanzas mínimas para todo el Estado, mientras es competencia de las Administraciones Educativas establecer el currículo con mayor detalle. En el Real Decreto 1006/1991, de 14 de junio (BOE 26-6-1991), el MEC establece los mencionados aspectos básicos del currículo de matemáticas de Educación Primaria.

En este capítulo presentamos las principales características del currículo oficial de matemáticas para la educación primaria en España, junto con las orientaciones curriculares elaboradas en EE.UU por el National Council of Teachers of Matemáticas

(Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares; NCTM 2000). Esto permitirá a los maestros en formación tener elementos de comparación y disponer de criterios para hacer una interpretación crítica y constructiva de las orientaciones curriculares.

2. FINES Y OBJETIVOS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

2.1. ¿Por qué y para qué enseñar matemáticas?

En este apartado analizaremos las siguientes razones ofrecidas en los documentos curriculares para apoyar la enseñanza de las matemáticas:

- La matemática es una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos adultos, quienes precisan adquirir competencias numéricas, geométricas, estadísticas y de medida suficientes para desenvolverse en su vida diaria, así como para leer e interpretar información matemática que aparece en los medios de información.
- Es útil para la vida posterior, ya que en todas las profesiones se precisan unos conocimientos de diverso nivel de sofisticación sobre las matemáticas.
- Su estudio ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva.
- Ayuda a comprender los restantes temas del currículo, tanto de la educación obligatoria como posterior, que con frecuencia se apoyan en cálculos, conceptos o razonamientos matemáticos.

3. Analiza las ideas matemáticas que aparecen en un ejemplar del diario local o nacional. ¿Piensas que algún adulto puede tener dificultad en interpretar algunas de estas ideas? ¿Cómo puede influir una interpretación incorrecta de ideas o información matemática en las siguientes situaciones: elaboración de un presupuesto, lectura de un contrato de trabajo, elaboración del plano de una vivienda?

4. Analiza la presencia de contenidos matemáticos en otras áreas curriculares, tales como geografía, ciencias sociales, dibujo, etc.

2.2. Justificación y orientación del currículo básico del MEC

El Diseño Curricular Base (MEC, 1989) reconoce que las matemáticas constituyen hoy un conjunto amplio de modelos y procedimientos de análisis, cálculo, medida y estimación, útiles para establecer relaciones espaciales, cuantitativas y de otros tipos entre diferentes aspectos de la realidad. A semejanza de otras disciplinas, constituyen un campo en continua expansión y de creciente complejidad, lo que tiene también consecuencias sobre la educación en matemáticas, que si bien ha estado presente tradicionalmente en la enseñanza, puede y merece ser enseñada con procedimientos distintos de los tradicionales. La misma introducción y aplicación de nuevos medios tecnológicos en matemáticas obliga a un planteamiento diferente tanto en los contenidos como en la forma de su enseñanza.

El currículo debe reflejar el proceso constructivo del conocimiento matemático, tanto en su progreso histórico como en su apropiación por el individuo. La formalización y estructuración del conocimiento matemático como sistema deductivo no es el punto de partida, sino más bien un punto de llegada de un largo proceso de construcción de instrumentos intelectuales eficaces para interpretar, representar, analizar, explicar y predecir determinados aspectos de la realidad.

La constante referencia a la realidad que se encierra en la actividad matemática no ha de hacer olvidar, por otro lado, los elementos por los que las matemáticas precisamente se distancian de la misma, mediante la creatividad, la crítica, el poder de imaginar y representar no sólo espacios físicos reales, sino, con generalidad mayor, una "realidad" alternativa. La exploración y desarrollo de modelos "puramente" matemáticos contribuyen a describir, comprender y explicar mejor la complejidad del mundo.

La enseñanza de las matemáticas se justifica también por objetivos de desarrollo intelectual general: se destaca que las matemáticas contribuyen al desarrollo de capacidades cognitivas abstractas y formales, de razonamiento, abstracción, deducción, reflexión y análisis.

Hay que destacar también el valor funcional que poseen como conjunto de procedimientos para resolver problemas en muy diferentes campos, para poner de relieve aspectos y relaciones de la realidad no directamente observables y para predecir hechos, situaciones o resultados antes de que se produzcan o se observen empíricamente. Ambos aspectos, el funcional y el formativo, son indisociables y complementarios, no antagónicos.

Por otro lado, en la sociedad actual es imprescindible manejar conceptos matemáticos relacionados con la vida diaria, en el ámbito del consumo, la economía privada y otras situaciones de la vida social. A medida que los alumnos progresan a través de los ciclos de la educación obligatoria, se precisan unas matemáticas más complejas, tanto en las ciencias de la naturaleza como en las ciencias sociales. Por ello, su aprendizaje ha de llevar a la capacidad de utilizar el lenguaje matemático en la elaboración y comunicación de conocimientos.

Así pues, a lo largo de la educación obligatoria las matemáticas han de desempeñar, un papel formativo básico de capacidades intelectuales, un papel aplicado a problemas y situaciones de la vida diaria, y un papel instrumental para adquirir conocimientos en otras materias.

Todo ello justifica los contenidos de las matemáticas en esta etapa, así como las características didácticas básicas de su enseñanza, así como los siguientes principios de selección y organización de sus contenidos. Estos principios no se aplican por igual desde el comienzo de la Educación Primaria al final de la Educación Secundaria, pero mantienen su vigencia a lo largo de la educación obligatoria:

1. Las matemáticas han de ser presentadas a alumnos y alumnas como un conjunto de conocimientos y procedimientos que han evolucionado en el transcurso del tiempo, y que, con seguridad, continuarán evolucionando en el futuro. En esa presentación han de quedar resaltados los aspectos inductivos y constructivos y no sólo los aspectos deductivos de la organización formalizada que le caracteriza como producto final. En el aprendizaje de los propios alumnos hay que reforzar el uso del razonamiento empírico inductivo en paralelo con el uso del razonamiento deductivo y de la abstracción.

2. Es necesario relacionar los contenidos de matemáticas con la experiencia de alumnos y alumnas, y presentarlos en un contexto de resolución de problemas y de contraste de puntos de vista en esta resolución. En relación con ello, hay que presentar las matemáticas como conocimiento que sirve para almacenar una

información de otro modo inasimilable, para proponer modelos que permiten comprender procesos complejos del mundo natural y social y para resolver problemas muy diferentes, gracias a la posibilidad de abstracción, simbolización y formalización propia de las matemáticas.

3. La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas ha de atender equilibradamente a: *a*) al establecimiento de destrezas cognitivas de carácter general, susceptibles de ser utilizadas en una amplia gama de casos particulares, que potencian las capacidades cognitivas de los alumnos; *b*) a su aplicación funcional, posibilitando que los alumnos valoren y apliquen sus conocimientos matemáticos fuera del ámbito escolar, en situaciones de la vida cotidiana; *c*) a su valor instrumental, creciente a medida que el alumno progresa hacia tramos superiores de la educación, y en la medida en que las matemáticas proporcionan formalización al conocimiento humano riguroso y, en particular, al conocimiento científico.

En la educación Primaria los diferentes aspectos (formativo, funcional, instrumental) son muy importantes, ya que, debido a su abstracción, formalización y complejidad, gran parte de los conceptos y procedimientos matemáticos escapan a las posibilidades de comprensión de alumnos y alumnas. Por ello, en esta etapa, a semejanza de lo que debe hacerse con otras áreas, el punto de partida del proceso de construcción del conocimiento matemático ha de ser la experiencia práctica y cotidiana que niños y niñas poseen. Las relaciones entre las propiedades de los objetos y de las situaciones que alumnos y alumnas establecen de forma intuitiva y espontánea en el curso de sus actividades diarias han de convertirse en objeto de reflexión, dando paso de ese modo a las primeras experiencias propiamente matemáticas. Se trata de experiencias sencillas y cotidianas tales como la organización del espacio y la orientación dentro de él (en casa, en el colegio, en la vecindad), los ciclos y rutinas temporales (días de la semana, horas de comer, etc.), las operaciones de medición que realizan los adultos (contando, pesando, etc.), el uso del dinero en las compras cotidianas o la clasificación de objetos de acuerdo con determinadas propiedades.

La orientación de la enseñanza y del aprendizaje en esta etapa se sitúa a lo largo de un continuo que va de lo estrictamente manipulativo, práctico y concreto hasta lo esencialmente simbólico, abstracto y formal. Las experiencias matemáticas iniciales serán de naturaleza esencialmente intuitiva y estarán vinculadas a la manipulación de objetos concretos y a la actuación en situaciones particulares. Aunque podemos detenernos durante períodos de tiempo dilatados, estas experiencias iniciales son sólo un punto de partida que hay que abandonar en algún momento, para construir el conocimiento matemático a través de una abstracción y formalización crecientes, y corregir los errores, distorsiones e insuficiencias de la intuición espontánea. Sin necesidad de alcanzar la comprensión plena de algunos conceptos y procedimientos matemáticos, éstos pueden cumplir sus funciones instrumentales en un nivel que se corresponde con las necesidades y capacidades de los alumnos de Primaria.

Es importante que los alumnos tengan dominio funcional de estrategias básicas de cómputo, de cálculo mental, de estimaciones de resultados y de medidas, así como también de utilización de la calculadora, sin necesidad de conocer sus fundamentos matemáticos. Junto con ello, los alumnos y alumnas tendrán que adquirir una actitud positiva hacia las matemáticas, para valorar y comprender la utilidad del conocimiento matemático, interesarse por su uso, el modo en que permite ordenar la información, comprender la realidad y resolver determinados problemas.

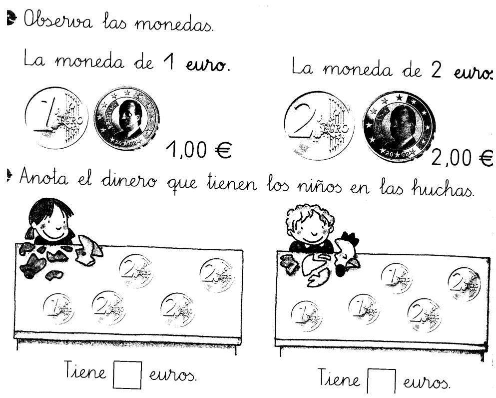
5. Analiza la siguiente actividad de un texto de primer curso de primaria.

¿Qué contenidos se tratan?

¿Cómo se relacionan con la experiencia del alumno?

¿Qué tipo de conocimiento puede adquirir el alumno?

¿Cómo se podría hacer progresar hacia un conocimiento más formal?



Objetivos generales

Una vez establecidas las motivaciones anteriores, el Decreto curricular indica que la enseñanza de las matemáticas en la etapa de Educación Primaria tendrá como objetivo contribuir a desarrollar en los alumnos y alumnas las capacidades de:

1. Utilizar el conocimiento matemático para interpretar, valorar y producir informaciones y mensajes sobre fenómenos conocidos.
2. Reconocer situaciones de su medio habitual en las que existan problemas para cuyo tratamiento se requieran operaciones elementales de cálculo, formularlos mediante formas sencillas de expresión matemática y resolverlos utilizando los algoritmos correspondientes.
3. Utilizar instrumentos sencillos de cálculo y medida decidiendo, en cada caso, sobre la posible pertinencia y ventajas que implica su uso y sometiendo los resultados a una revisión sistemática.
4. Elaborar y utilizar estrategias personales de estimación, cálculo mental y orientación espacial para la resolución de problemas sencillos, modificándolas si fuera necesario.
5. Identificar formas geométricas en su entorno inmediato, utilizando el conocimiento de sus elementos y propiedades para incrementar su comprensión y desarrollar nuevas posibilidades de acción en dicho entorno.
6. Utilizar técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones de su entorno; representarla de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.
7. Apreciar el papel de las matemáticas en la vida cotidiana, disfrutar con su uso y reconocer el valor de actitudes como la exploración de distintas alternativas, la conveniencia de la precisión o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Identificar en la vida cotidiana situaciones y problemas susceptibles de ser analizados con la ayuda de códigos y sistemas de numeración, utilizando las propiedades y características de éstos para lograr una mejor comprensión y resolución de dichos problemas.

6. Indica dos situaciones de la vida cotidiana del niño en que aparezca problemas aritméticos, otras dos en que se requiera la orientación espacial y otras dos en que aparezcan problemas de estimación o medida.

7. Identifica en un libro de matemáticas de educación primaria una actividad relacionada con cada uno de los objetivos anteriores.

2.3. Principios para las matemáticas escolares propuestos por el NCTM

A continuación presentaremos una síntesis de la última edición de las orientaciones curriculares elaboradas por la prestigiosa organización de profesores de matemáticas de Estados Unidos, National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), que se conocen con el nombre de "*Principios y Estándares para la Matemática Escolar*" (*Principios y Estándares 2000*). El proceso riguroso y sistemático aplicado en su desarrollo han permitido elaborar unas guías curriculares que suponen un claro progreso con relación a las orientaciones curriculares elaboradas en nuestro país a principios de los noventa, tanto para todo el estado español como en las distintas comunidades autónomas.

Los Principios y Estándares proporcionan una guía y una perspectiva general, esto es, se trata de un "Diseño curricular base", y deja, por tanto, las decisiones curriculares específicas a los niveles locales de decisión (Proyectos de Centro, y Programaciones de Aula). Consideramos que es un documento de gran ayuda que nos permite contrastar y valorar los diseños curriculares propuestos en España a nivel nacional y regional para el área de matemáticas. Además, ofrecen una visión de las matemáticas y su enseñanza, y unos recursos educativos, que en líneas generales son coherentes con el enfoque epistemológico, cognitivo e instruccional que hemos descrito en los capítulos anteriores.

El documento "Principios y Estándares para la Matemática Escolar" está disponible en Internet en versión electrónica, junto con otros recursos complementarios para la enseñanza de las matemáticas en los niveles de educación infantil hasta el bachillerato para su difusión internacional.

8. Explora la página de Internet dedicada a los Principios y Estándares para la matemática escolar: http://standards.nctm.org/

¿Qué tipo de recursos se recogen? ¿Cómo pueden estos recursos ser útiles a un profesor?

Los Principios y Estándares para la Matemática Escolar pretenden ser un recurso y una guía para todas las personas que toman decisiones que afectan a la educación matemática de los estudiantes de los niveles desde infantil hasta el bachillerato (grados K-12, en terminología de EE.UU.). Las recomendaciones enfatizan la importancia de la comprensión y se describen modos de cómo pueden lograrla los estudiantes. Han sido elaborados por diversos grupos de trabajo formados por profesores de matemáticas y especialistas en educación matemática durante un período de unos tres años, partiendo de la información y experiencia aportada por documentos similares elaborados en ediciones anteriores (Estándares Curriculares; Estándares Profesionales para la Enseñanza de las Matemáticas; Estándares de Evaluación para las Matemáticas Escolares)

- Los *Principios* son enunciados que reflejan preceptos básicos que son fundamentales para el logro de una educación matemática de calidad; deberían ser útiles como perspectivas sobre las que los educadores pueden basar sus decisiones que afectan a las matemáticas escolares.

- Los *Estándares* describen el contenido matemático y los procesos que los estudiantes deberían aprender.

Los *Principios* y los *Estándares* conjuntamente constituyen guías para los educadores en su esfuerzo por una mejora continua de la educación matemática en las clases, las escuelas y el sistema educativo. A continuación describimos los seis principios recogidos en el documento

Principios para las Matemáticas Escolares

- **Equidad**. La educación matemática de calidad ha de basarse en la equidad – unas altas expectativas y apoyo para todos los estudiantes, según sus características.
- **Currículo**. Un currículo es más que una colección de actividades: debe ser coherente, centrado en unas matemáticas importantes y bien articuladas a lo largo de los distintos niveles.
- **Enseñanza**. Una enseñanza efectiva de las matemáticas requiere que los estudiantes comprendan lo que conocen y lo que necesitan aprender, y por tanto se plantea el desafío de apoyarles en un aprendizaje correcto.
- **Aprendizaje**. Los estudiantes deben aprender matemáticas con comprensión, construyendo activamente el nuevo conocimiento a partir de la experiencia y el conocimiento previo.
- **Evaluación**. La evaluación debe apoyar el aprendizaje de unas matemáticas relevantes y proporcionar información útil tanto a los profesores como a los estudiantes.
- **Tecnología**. La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y estimula el aprendizaje de los estudiantes.

Estos seis principios no se refieren a contenidos o procesos matemáticos específicos, mientras que los Estándares sí se refieren a dichos contenidos y procesos. Los principios describen cuestiones cruciales que, aunque no sean específicas de las matemáticas escolares, están profundamente interconectadas con los programas de matemáticas. Pueden influir en el desarrollo de marcos curriculares, la selección de materiales curriculares, la planificación de unidades o lecciones instruccionales, el diseño de evaluaciones, la asignación de los profesores y los estudiantes a las clases, las decisiones instruccionales en las clases, y el establecimiento de programas de apoyo para el desarrollo profesional de los profesores.

9. ¿Cómo pueden producirse problemas de falta de equidad en la clase de matemáticas? ¿Cómo pueden los libros de texto u otros materiales no respetar el principio de equidad?

10. Pon ejemplos de la forma en la que la calculadora puede afectar a la clase de matemáticas. ¿Qué otros recursos tecnológicos podrían afectar a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas?

3. CONTENIDOS MATEMÁTICOS EN PRIMARIA

3.1 Diferentes tipos de contenidos: conceptos, procedimientos y actitudes

En el Capítulo 1 de esta Monografía ya se ha comentado que el Diseño Curricular Base está organizado teniendo en cuenta tres tipos de contenidos: conceptos, procedimientos y actitudes. En los bloques de estas orientaciones se señalan en tres apartados distintos los tres tipos de contenido. El primero de ellos es el que presenta los conceptos, hechos y principios. El segundo tipo de contenido es el que se refiere a los procedimientos. Este tipo de contenido, si bien estaban presentes en los currículos anteriores, quedaban relegados a un segundo plano. En el DCB los procedimientos pasan a un primer plano y además éstos no se restringen a los algoritmos ya que se contemplan procedimientos generales como por ejemplo el cálculo mental o la resolución de problemas. La novedad más importante es la incorporación en el currículo contenidos de actitudes, valores y normas con el objetivo de que el alumno tenga una actitud positiva que le permita perseverar en el esfuerzo necesario para la construcción de los nuevos contenidos que se le proponen en el proceso de estudio.

3.2. Bloques de contenidos en el currículo básico del MEC y su estructuración

El Currículo del MEC se organiza en cuatro bloques de contenidos, diferenciando en ellos conceptos, procedimientos y actitudes. A continuación los reproducimos.

1. Números y operaciones

Conceptos

1. Números naturales, fraccionarios y decimales:
2. Sistema de Numeración Decimal:
3. Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división:
4. Reglas de uso de la calculadora

Procedimientos

1. Utilización de diferentes estrategias para contar de manera exacta y aproximada.
2. Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos y en la resolución de problemas numéricos.
3. Estimación del resultado de un cálculo y valoración de si una determinada respuesta numérica es o no razonable.
4. Elaboración de estrategias personales de cálculo mental con números sencillos.
5. Utilización de la calculadora de cuatro operaciones y decisión sobre la conveniencia o no de usarla atendiendo a la complejidad de los cálculos y a la exigencia de exactitud de los resultados.

Actitudes

1. Curiosidad por indagar y explorar sobre el significado de los códigos numéricos y alfanuméricos y las regularidades y relaciones que aparecen en conjuntos de números.

2. Sensibilidad e interés por las informaciones y mensajes de naturaleza numérica apreciando la utilidad de los números en la vida cotidiana.
3. Confianza en las propias capacidades y gusto por la elaboración y uso de estrategias personales de cálculo mental.
4. Gusto por la presentación ordenada y clara de los cálculos y de sus resultados.

11. ¿Qué puede hacer el maestro en la clase de matemáticas para aumentar la curiosidad de sus alumnos? ¿para reforzar la confianza en su propia capacidad para hacer matemáticas? ¿para motivarlos a una presentación clara y ordenada de las soluciones a las tareas propuestas?

12. Da una lista de estrategias sencillas de cálculo mental que puedan ser útiles a los alumnos que finalizan la educación primaria en situaciones cotidianas, tales como ir a hacer la compra.

13. Razona cómo la implantación del Euro ha influido en la creación de nuevas necesidades de aprendizaje, en lo que se refiere a conceptos numéricos.

2. La medida

Conceptos

1. Necesidad y funciones de la medición:
2. Unidades no convencionales.
3. Las unidades de medida del Sistema Métrico Decimal: (longitud, superficie, capacidad, masa).
4. Las unidades de medida de tiempo.

Procedimientos

1. Mediciones con unidades convencionales y no convencionales.
2. Elaboración y utilización de estrategias personales para llevar a cabo estimaciones de medidas en situaciones cotidianas.
3. Toma de decisiones sobre las unidades de medida más adecuadas en cada caso atendiendo al objetivo de la medición.
4. Expresión verbal del proceso seguido y de la estrategia utilizada en la medición.

Actitudes

1. Valoración de la importancia de las mediciones y estimaciones en la vida cotidiana.
2. Gusto por la precisión apropiada en la realización de mediciones.
3. Curiosidad e interés por averiguar la medida de algunos objetos y tiempos familiares.
4. Tendencia a expresar los resultados numéricos de las mediciones manifestando las unidades de medida utilizadas.

14. Analiza la progresión del aprendizaje de las unidades de medida de tiempo en la enseñanza primaria en una colección de libros de texto. ¿Piensas que tienen en cuenta los contenidos actitudinales?

3. Formas geométricas y situación en el espacio

Conceptos

1. La situación en el espacio (distancias, ángulos y giros, y sistema de coordenadas cartesianas)
2. Relación entre elementos geométricos (paralelismo, perpendicularidad)
3. La representación elemental del espacio (planos, mapas, maquetas)
4. Formas planas y espaciales
5. Regularidades y simetrías.

Procedimientos

1. Descripción de la situación y posición de un objeto en el espacio con relación a uno mismo y/o a otros puntos de referencia apropiados.
2. Interpretación y descripción verbal de croquis, planos, maquetas y mapas.
3. Comparación y clasificación de figuras y cuerpos geométricos utilizando diversos criterios.
4. Formación de figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otras por composición y descomposición.
5. Búsqueda de elementos de regularidad y simetría en figuras y cuerpos geométricos.

Actitudes

1. Valoración de la utilidad de los sistemas de referencia y de la representación espacial en actividades cotidianas.
2. Sensibilidad y gusto por la elaboración y por la presentación cuidadosa de las construcciones geométricas.
3. Precisión y cuidado en el uso de instrumentos de dibujo y disposición favorable para la búsqueda de instrumentos alternativos.
4. Interés y perseverancia en la búsqueda de soluciones a situaciones problemáticas relacionadas con la organización y utilización del espacio.

4. Organización de la información

Conceptos

1. La representación gráfica:
2. Las tablas de datos.
3. Tipos de gráficas estadísticas: bloques de barras, pictogramas, diagramas lineales, etc.
4. Carácter aleatorio de algunas experiencias.

Procedimientos

1. Exploración sistemática, descripción verbal e interpretación de los elementos significativos de gráficas sencillas relativas a fenómenos familiares.
2. Recogida y registro de datos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición.
3. Elaboración de gráficas estadísticas con datos poco numerosos relativos a situaciones familiares.
4. Expresión sencilla del grado de probabilidad de un suceso.

Actitudes

1. Actitud crítica ante las informaciones y mensajes transmitidos de forma gráfica y tendencia a explorar todos los elementos significativos.
2. Valoración de la expresividad del lenguaje gráfico como forma de representar muchos datos.
3. Sensibilidad y gusto por las cualidades estéticas de los gráficos observados o elaborados.

15. Analiza los conceptos y procedimientos implicados en la resolución de la siguiente tarea. ¿Se recogen todas las indicadas en el Decreto de Educación Primaria? Completa la tarea para que se recojan todos ellos.

Ejercicio. Al medir la altura en cm. que pueden saltar un grupo de escolares, antes y después de haber efectuado un cierto entrenamiento deportivo, se obtuvieron los valores siguientes. ¿Piensas que el entrenamiento es efectivo?

Altura saltada en cm.

Alumno	Ana	Bea	Carol	Diana	Elena	Fanny	Gema	Hilda	Ines	Juana
Antes del entrenamiento	115	112	107	119	115	138	126	105	104	115
Después del entrenamiento	128	115	106	128	122	145	132	109	102	117

3.3. Estándares de contenidos y procesos del NCTM

Los Estándares constituyen un fundamento global recomendado para todos los estudiantes. Se formulan estándares para cinco bloques de contenido matemático y cinco tipos de procesos matemáticos. Los bloques de contenido son: Números y operaciones, Álgebra, Geometría, Medición, Análisis de Datos y Probabilidad, mientras que los tipos de procesos matemáticos se refieren a: Resolución de Problemas, Razonamiento y prueba, Comunicación, Conexiones y Representaciones.

Cada uno de estos diez Estándares se aplican en todos los niveles, desde educación infantil a bachillerato y proponen las matemáticas que todos los estudiantes deberían tener oportunidad de aprender. Cada Estándar comprende un pequeño número de objetivos que se aplican a todos los niveles – un núcleo común que promueve un foco en el crecimiento del conocimiento de los estudiantes a medida que progresan en el currículo. En cada tramo de niveles se formulan un conjunto adicional de expectativas específicas sobre los estándares de contenido. No se espera que cada tópico sea tratado todos los años ni que los distintos contenidos se traten de manera separada unos de otros. Las distintas áreas se solapan y están integradas. Los procesos se pueden aprender dentro de los contenidos, y los contenidos se puede aprender dentro de los procesos.

Ejemplos

> Los números penetran en todas las áreas de matemáticas. Algunos temas sobre análisis de datos se pueden caracterizar como parte de la medición. Los patrones y funciones aparecen en geometría. Los procesos de razonamiento, prueba, resolución de problemas y representación se usan en todas las áreas de contenido.

La disposición del currículo en estos Estándares se propone como una organización coherente del contenido y los procesos matemáticos. Las personas que diseñen marcos curriculares específicos, evaluaciones, materiales instruccionales, programaciones de aula basados en los *Principios y Estándares* necesitarán tomar sus propias decisiones sobre el orden y el énfasis en los distintos contenidos y procesos.

Los objetivos generales incluidos en las tablas 3.1 y 3.2 se concretan en objetivos más específicos (expectativas) según los siguientes tramos de niveles o grados en que se divide el sistema educativo en EE.UU: Preescolar a 2º Grado (edades 5 a 7 años); Grados 3 a 5 (8-10 años); Grados 6 a 8 (11-13 años) y Grados 9 a 12 (14-17 años). El tramo de edades de los niveles intermedios, Grados 6 a 8, incluye el 6º Nivel, que para nosotros corresponde a la Educación Primaria.

Tabla 3.1: Estándares de contenidos matemáticos para los niveles de educación infantil a bachillerato

Contenidos y procesos	*Los programas instruccionales deberían capacitar a los estudiantes para:*
Números y operaciones	• comprender los números, los modos de representar los números, relaciones entre los números, y los sistemas numéricos; • comprender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras; • calcular eficazmente y hacer estimaciones razonables.
Álgebra	• comprender patrones, relaciones y funciones; • representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas usando símbolos algebraicos; • usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas; • analizar el cambio en diversos contextos.
Geometría	• analizar las características y propiedades de las formas geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas; • especificar posiciones y describir relaciones espaciales usando geometría de coordenadas y otros sistemas de representación; • aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas; • usar la visualización, el razonamiento espacial, y la modelización geométrica para resolver problemas.
Medición	• comprender los atributos medibles de los objetos y las unidades, sistemas, y procesos de medición;

	• aplicar técnicas apropiadas, herramientas, y fórmulas para determinar mediciones.
Análisis de Datos y Probabilidad	• formular cuestiones que se puedan plantear sobre datos y recoger, organizar, y presentar datos relevantes para responderlos; • seleccionar y usar métodos estadísticos apropiados para analizar datos; • desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en los datos; • comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad.

Tabla 3.2: Estándares sobre procesos matemáticos para los niveles de educación infantil a bachillerato

Contenidos y procesos	*Los programas instruccionales deberían capacitar a los estudiantes para:*
Resolución de Problemas	• construir nuevo conocimiento matemático por medio de la resolución de problemas; • resolver problemas que surgen de las matemáticas y en otros contextos; • aplicar y adaptar una variedad de estrategias apropiadas para resolver problemas; • controlar y reflexionar sobre el proceso de resolver problemas matemáticos.
Razonamiento y Prueba	• reconocer el razonamiento y la prueba como aspectos fundamentales de las matemáticas; • hacer e investigar conjeturas matemáticas; • desarrollar y evaluar argumentos y pruebas; • seleccionar y usar varios tipos de razonamientos y métodos de prueba.
Comunicaciones	• organizar y consolidar su pensamiento matemático mediante la comunicación; • comunicar su pensamiento matemático de manera coherente y clara a los compañeros, profesores y a otras personas; • analizar y evaluar el pensamiento matemático y las estrategias de los demás; • usar el lenguaje de las matemáticas para expresar ideas matemáticas de manera precisa.
Conexiones	• reconocer y usar conexiones entre las ideas matemáticas; • comprender cómo se relacionan las ideas matemáticas y se organizan en un todo coherente. • reconocer y aplicar las ideas matemáticas en contextos no matemáticos.
Representaciones	• crear y usar representaciones para organizar, registrar, y comunicar ideas matemáticas; • seleccionar, aplicar, y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas; • usar representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos

16. Analizar las diferencias y semejanzas en las orientaciones curriculares siguientes respecto de los contenidos matemáticos para los niveles de primaria:

- Currículo básico del MEC
- Las orientaciones curriculares de tu Comunidad Autónoma
- Principios y Estándares 2000 del NCTM.

4. ORIENTACIONES SOBRE LA EVALUACIÓN

4.1. Fines y tipos de evaluación. Principios básicos

La evaluación es el proceso de recogida y análisis de información que permite conocer hasta qué punto se está produciendo un buen proceso de enseñanza y aprendizaje y qué problemas se están planteando en este proceso. La información resultante proporciona al profesor elementos para analizar críticamente su intervención educativa, detectar necesidades y tomar decisiones al respecto. En la evaluación, como seguimiento continuo del proceso de enseñanza y aprendizaje cabe distinguir tres momentos o aspectos complementarios:

- *Evaluación inicial*: aporta información sobre la situación de cada alumno al iniciar un determinado proceso de enseñanza y aprendizaje que permite adecuar este proceso a sus posibilidades. Desde la perspectiva del aprendizaje significativo, esta evaluación se convierte en una tarea prioritaria para conocer los conocimientos previos de los alumnos.
- *Evaluación formativa o continua*: pone énfasis en el proceso de enseñanza y aprendizaje entendido como un continuo. Es una evaluación con carácter regulador, de orientación y autocorrectora del proceso educativo, al proporcionar información constante sobre si este proceso se adapta a las necesidades o posibilidades del sujeto, permitiendo la modificación de aquellos aspectos que resulten poco funcionales.
- *Evaluación sumativa*: proporciona información sobre el grado de consecución de los objetivos propuestos, referidos a cada alumno y al proceso formativo. Esta evaluación toma datos de la formativa y añade a éstos otros obtenidos de forma más puntual.

La evaluación se considera hoy día una parte importante del proceso de instrucción. Se concibe la evaluación como un proceso dinámico y continuo de producción de información sobre el progreso de los alumnos hacia los objetivos de aprendizaje. El principal propósito es mejorar el aprendizaje de los alumnos. Otros fines secundarios de la evaluación son:

- Proporcionar a los alumnos información individual sobre qué han aprendido y en qué puntos tienen dificultades.
- Proporcionar información al profesor, a los padres y al centro escolar sobre el progreso y la comprensión de sus alumnos, en general y sobre las dficultades de estudiantes particulares
- Proporcionar a las autoridades educativas o a cualquier agente educativo un indicador global del éxito conseguido en los objetivos educativos.

Cuando la evaluación es una parte integral de la instrucción matemática, contribuye de manera significativa al aprendizaje matemático de todos los estudiantes. *"La evaluación debería apoyar el aprendizaje de unas matemáticas importantes y proporcionar información útil a los profesores y a los estudiantes"* (NCTM 2000, Principio de Evaluación)

La evaluación debería ser más que un test al final de la instrucción para ver cómo se comportan los estudiantes bajo condiciones especiales; en su lugar, debería ser una parte integral de la instrucción que informa y guía a los profesores en la toma de decisiones.

Además, la evaluación no debería hacerse sólo *a* los estudiantes; se debe realizar *para* los estudiantes, para guiar y estimular su aprendizaje. Los Estándares de Evaluación de las Matemáticas Escolares (NCTM, 1995) proponen que una evaluación ejemplar de las matemáticas debería,

- reflejar las matemáticas que los estudiantes deberían conocer y lo que deberían ser capaces de hacer;
- estimular el aprendizaje de las matemáticas;
- promover la equidad;
- ser un proceso abierto;
- promover inferencias válidas;
- ser un proceso coherente.

En los siguientes apartados incluimos las orientaciones sobre la evaluación de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas contenidas en el currículo básico del MEC y los Estándares sobre Evaluación del NCTM.

4.2. La evaluación en el currículo básico del MEC

En el DCB se contemplan los siguientes criterios:

1. En un contexto de resolución de problemas sencillos, anticipar una solución razonable y buscar los procedimientos matemáticos más adecuados para abordar el proceso de resolución.

Este criterio está dirigido especialmente a comprobar la capacidad del alumno o la alumna en la resolución de problemas, atendiendo al proceso que ha seguido. Se trata de verificar que el alumnado trata de resolver un problema de forma lógica y reflexiva.

2. Resolver problemas sencillos del entorno aplicando las cuatro operaciones con números naturales y utilizando estrategias personales de resolución.

Con este criterio se pretende evaluar que el alumnado sabe seleccionar y aplicar debidamente las operaciones de cálculo en situaciones reales. Se deberá atender a que sean capaces de transferir los aprendizajes sobre los problemas propuestos en el aula a situaciones fuera de ella.

3. Leer, escribir y ordenar números naturales y decimales, interpretando el valor de cada una de sus cifras (hasta las centésimas), y realizar operaciones sencillas con estos números.

Con este criterio se pretende comprobar que el alumnado maneja los números naturales y decimales; igualmente, se trata de ver que sabe operar con estos números y que, en situaciones de la vida cotidiana, interpreta su valor.

4. Realizar cálculos numéricos mediante diferentes procedimientos (algoritmos, uso de la calculadora, cálculo mental y tanteo) utilizando el conocimiento sobre el sistema de numeración decimal

Este criterio trata de comprobar que los alumnos y las alumnas conocen las relaciones existentes en el sistema de numeración y que realizan cálculos numéricos eligiendo alguno de los diferentes procedimientos. Igualmente, se pretende detectar que saben usar la calculadora de cuatro operaciones.

5. Realizar estimaciones y mediciones escogiendo entre las unidades e instrumentos de medida más usuales, los que se ajusten mejor al tamaño y naturaleza del objeto a medir

Con este criterio se trata de que alumnos y alumnas demuestren su conocimiento sobre las unidades más usuales del SMD y sobre los instrumentos de medida más comunes. También se pretende detectar si saben escoger los más pertinentes en cada caso y si saben estimar la medida de magnitudes de longitud, superficie, capacidad, masa y tiempo. En cuanto a las estimaciones, se pretende que hagan previsiones razonables.

6. Expresar con precisión medidas de longitud, superficie, masa, capacidad y tiempo utilizando los múltiplos y submúltiplos usuales y convirtiendo unas unidades en otras cuando sea necesario

Con este criterio se pretende detectar que alumnos y alumnas saben utilizar con corrección las unidades de medida más usuales, que saben convertir unas unidades en otras (de la misma magnitud), y que los resultados de las mediciones que realizan los expresan en las unidades de medida más adecuadas y utilizadas.

7. Realizar e interpretar una representación espacial (croquis de un itinerario, plano, maqueta) tomando como referencia elementos familiares y estableciendo relaciones entre ellos

Este criterio pretende evaluar el desarrollo de las capacidades espaciales topológicas en relación con puntos de referencia, distancias, desplazamientos y ejes de coordenadas. La evaluación deberá llevarse a cabo mediante representaciones de espacios conocidos o mediante juegos.

8. Reconocer y describir formas y cuerpos geométricos del entorno próximo, clasificarlos y dar razones del modo de clasificación

Este criterio pretende comprobar que el alumno o la alumna conoce algunas propiedades básicas de los cuerpos y formas geométricas, que elige alguna de esas propiedades para clasificarlos y que explica y justifica la elección.

9. Utilizar las nociones geométricas de simetría, paralelismo, perpendicularidad, perímetro y superficie para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana.

En este criterio es importante detectar que los alumnos han aprendido estas nociones y saben utilizar los términos correspondientes para dar y pedir información.

10. Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato

Este criterio trata de comprobar que el alumno o la alumna es capaz de recoger y registrar una información que se pueda cuantificar, que sabe utilizar algunos recursos sencillos de representación gráfica, tablas de datos, bloques de barras, diagramas lineales, etc., y que entiende y comunica la información así expresada.

11. Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado de juegos de azar sencillos y comprobar dicho resultado

Se trata de comprobar que los alumnos empiezan a constatar que hay sucesos imposibles, sucesos que con toda seguridad se producen, o que se repiten, siendo más o menos probable esta repetición. Estas nociones estarán basadas en su experiencia.

12. Expresar de forma ordenada y clara los datos y las operaciones realizadas en la resolución de problemas sencillos

Este criterio trata de comprobar que el alumno o la alumna comprende la importancia que el orden y la claridad tienen en la presentación de los datos de un problema para la búsqueda de una buena solución, para detectar los posibles errores y para explicar el razonamiento seguido. Igualmente, trata de verificar que comprende la importancia que tiene el cuidado en la disposición correcta de las cifras al realizar los algoritmos de las operaciones propuestas.

13. Perseverar en la búsqueda de datos y soluciones precisas en la formulación y la resolución de un problema

Se trata de ver si el alumno valora la precisión en los datos que recoge y en los resultados que obtiene y si persiste en su búsqueda, en relación con la medida de las distintas magnitudes, con los datos recogidos para hacer una representación gráfica y con la lectura de representaciones.

17. Indica cuáles de los siguientes instrumentos de evaluación podrían ser útiles para cada uno de los criterios básicos de evaluación (1 a 13) del currículo del MEC.

- Observación sistemática de las intervenciones de los alumnos en clase a lo largo del curso
- Revisión periódica de los cuadernos y apuntes de los alumnos;
- Pruebas específicas escritas tipo examen
- Preguntas realizadas en clase a alumnos particulares o a toda la clase;
- Trabajos de síntesis sobre un tema o una colección de lecturas. que muestren la comprensión y capacidad de síntesis
- Proyectos y trabajos individuales o colectivos
- Test de opciones múltiples
- Problemas para realizar en la clase o como trabajo de casa
- "Dossier" donde el profesor va recogiendo información diversa acerca del alumno
- "Diario" elaborado por los alumnos con resúmenes de lo aprendido en clase

4.3. La evaluación en los Estándares del NCTM

El National Council of Teachers of Mathematicas (NCTM, 1991), propone dos categorías de estándares de evaluación de la enseñanza de las matemáticas: El proceso y los focos de la evaluación. Sobre el proceso de evaluación se formulan tres estándares y sobre los focos de evaluación cinco estándares.

A: EL PROCESO DE EVALUACIÓN:

ESTÁNDAR 1: *EL CICLO DE EVALUACIÓN*

La evaluación de la enseñanza de las matemáticas debería ser un proceso cíclico que implique:

- recogida periódica y análisis de información sobre la enseñanza de las matemáticas de un individuo;
- el desarrollo profesional basado en el análisis de la enseñanza;

- la mejora de la enseñanza como consecuencia del desarrollo profesional.

ESTÁNDAR 2: *LOS PROFESORES COMO PARTICIPANTES DE LA EVALUACIÓN*

La evaluación de la enseñanza de las matemáticas debería proporcionar oportunidades progresivas para que los profesores:

- analicen su propia enseñanza;
- deliberar con los colegas sobre su enseñanza;
- consultar con sus supervisores sobre su enseñanza.

ESTÁNDAR 3: *FUENTES DE INFORMACIÓN*

La evaluación de la enseñanza de las matemáticas debería estar basada en información procedente de una variedad de fuentes incluyendo:

- los objetivos del profesor y las expectativas sobre el aprendizaje de los estudiantes;
- los planes del profesor para el logro de estos objetivos;
- el archivo del profesor, formado por una muestra de planes de lecciones, actividades y materiales de los estudiantes, y los medios para evaluar la comprensión matemática de los estudiantes;
- análisis de múltiples episodios de enseñanza en clase;
- los análisis del profesor de la enseñanza en clase;
- evidencia, de la comprensión y actitud de los estudiantes hacia las matemáticas.

18. Indica todas las fuentes que el profesor puede utilizar para evaluar su propia actuación en el aula. ¿Por qué la autoevaluación es una parte importante de la tarea del profesor?

B. LOS FOCOS DE LA EVALUACIÓN:

ESTÁNDAR 4: *CONCEPTOS, PROCEDIMIENTOS Y CONEXIONES MATEMÁTICAS*

La evaluación de la enseñanza de conceptos, procedimientos y conexiones matemáticas debería proporcionar evidencia de que el profesor,

- demuestra un conocimiento adecuado de los conceptos y procedimientos matemáticos;
- representa las matemáticas como una red de conceptos y procedimientos interconectados;
- enfatiza las conexiones entre las matemáticas y otras disciplinas y las relaciona con la vida diaria;
- compromete a los estudiantes en tareas que promueven la comprensión de los conceptos, procedimientos y conexiones matemáticas;
- compromete a los estudiantes en un discurso matemático que amplia su

comprensión de los conceptos, procedimientos y conexiones matemáticas.

ESTÁNDAR 5: *LAS MATEMÁTICAS COMO RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS, RAZONAMIENTO Y COMUNICACIÓN*

La evaluación de la enseñanza de las matemáticas como un proceso que implica la resolución de problemas, el razonamiento y la comunicación debería proporcionar evidencia de que el profesor:

- ejemplifica y enfatiza los aspectos de resolución de problemas, incluyendo la formulación y el planteamiento de problemas, resolución de problemas usando diferentes estrategias, verificando e interpretando resultados, y generalizando soluciones;
- muestra y enfatiza el papel del razonamiento matemático;
- ejemplifica y enfatiza la comunicación matemática usando formas escritas, orales y visuales;
- compromete a los estudiantes en tareas que implican la resolución de problemas, el razonamiento y la comunicación;
- compromete a los estudiantes en el discurso matemático que amplia su comprensión de la resolución de problemas y su capacidad para razonar y comunicarse matemáticamente.

ESTÁNDAR 6: *PROMOCIÓN DE LA DISPOSICIÓN MATEMÁTICA*

La evaluación de que el profesor estimula la disposición matemática de los estudiantes debería proporcionar evidencia de que:

- modeliza una disposición para hacer matemáticas;
- muestra el valor de las matemáticas como un modo de pensar y sus aplicaciones en otras disciplinas y en la sociedad;
- promueve la confianza de los estudiantes, la flexibilidad, perseverancia, curiosidad, e inventiva en la actividad de matematización por medio del uso apropiado de tareas y comprometiendo a los estudiantes en el discurso matemático.

ESTÁNDAR 7: *EVALUACIÓN DE LA COMPRENSIÓN MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES*

La evaluación de los medios, por los que el profesor evalúa la comprensión de las matemáticas de los estudiantes debería proporcionar evidencia de que el profesor —

- usa una variedad de métodos de evaluación para determinar la comprensión matemática de los estudiantes;
- los métodos de evaluación concuerdan con el nivel de desarrollo, madurez matemática, y 1a base cultural de. los estudiantes;
- los métodos de evaluación se corresponden con lo que se enseña y cómo se enseña;
- analiza la comprensión individual de cada estudiante, su disposición para hacer,

matemáticas, de modo que la información sobre su desarrollo matemático pueda ser proporcionado a los estudiantes, sus padres y al personal escolar pertinente;

- basa la instrucción en la información obtenida en la evaluación de la comprensión de los estudiantes y de su disposición hacia las matemáticas.

ESTÁNDAR 8: *ENTORNO DE APRENDIZAJE*

La evaluación de la capacidad del profesor para crear un entorno de aprendizaje que estimula el desarrollo de la capacidad matemática de cada estudiante debería proporcionar evidencia de que el profesor:

- transmite la idea de que las matemáticas son un contenido para ser explorado y creado tanto individualmente como en colaboración con otros.
- respeta a los estudiantes y sus ideas y anima su curiosidad y espontaneidad;
- estimula a que los estudiantes extraigan y validen sus propias conclusiones;
- selecciona las tareas que permitan a los estudiantes construir nuevos significados mediante la construcción y la extensión de su conocimiento previo;
- hace un uso apropiado de los recursos disponibles;
- respeta y responde a los diversos intereses de los estudiantes así como a sus identidades culturales, lingüísticas y socioeconómicas mediante el diseño de las tareas matemáticas;
- apoya y estimula la participación completa y el estudio continuado de las matemáticas de todos los estudiantes.

19. Analizar las diferencias y semejanzas en las orientaciones curriculares siguientes respecto de la evaluación de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en primaria:

- Currículo básico del MEC
- Las orientaciones curriculares de tu Comunidad Autónoma
- Principios y Estándares 1991 del NCTM.

5. DISEÑO Y GESTIÓN DE UNIDADES DIDÁCTICAS

En este apartado sólo se dan algunas indicaciones para conseguir el objetivo de aprender a diseñar y gestionar unidades didácticas, ya que, evidentemente, este objetivo es muy ambicioso y sólo se puede alcanzar a partir de la experiencia que se obtiene al impartir clases reales.

El diseño de unidades didácticas (programaciones de aula o tercer nivel de concreción del currículo) tendrá en cuenta los documentos oficiales (primer nivel de concreción) y el *proyecto de centro* (segundo nivel de concreción).

El diseño de unidades didácticas implica la toma de decisiones en distintos ámbitos de concreción hasta culminar en un documento en el que el profesor concreta los objetivos, contenidos, actividades, recursos y materiales, instrumentos de evaluación y selección de estrategias metodológicas. Este documento será un instrumento de planificación y gestión del trabajo en clase con los alumnos, en un período corto de tiempo (unas 3 o 4 semanas) y se centra en un contenido matemático que tiene una cierta unidad temática, y que organiza el tratamiento de un cierto tipo de problemas en el nivel educativo correspondiente.

5.1 Elementos a tener en cuenta en la planificación de una unidad didáctica

Nos parece evidente que el diseño de las unidades didácticas se ha de basar en los seis elementos que describimos a continuación.

(1) *La información disponible sobre los objetivos y contenidos del currículo de primaria y del proyecto de centro correspondiente.*

Pero está información no es suficiente para asegurar que los alumnos realicen una actividad matemática "rica" que contemple los diferentes aspectos de dicha actividad descritos en el capítulo 1. Al analizar la actividad matemática en el primer capítulo vimos que un contenido que puede parecer elemental como, por ejemplo "suma", se convierte en un sistema complejo formado por conceptos, procedimientos, lenguaje, situaciones, argumentaciones, etc. Para analizar y organizar este sistema complejo las orientaciones curriculares, siendo importantes, son insuficientes, ya que el maestro tiene que tomar decisiones sobre el tipo de problemas que propondrá a los alumnos, el tipo de representaciones que utilizará, el orden de presentación de los contenidos, etc.

Por tanto conviene tener en cuenta en segundo lugar:

(2) *Los tipos de problemas que son el campo de aplicación de los contenidos matemáticos seleccionados.*

Las situaciones de la vida cotidiana y las otras ciencias puede ayudarnos mostrando los problemas que se pueden resolver con los contenidos de la unidad didáctica, mientras que la historia de las matemáticas puede ayudarnos para saber cómo y por qué fueron planteados.

Los tipos de problemas se resuelven con determinados procedimientos, entre los cuales tendremos que hacer una selección; estos procedimientos se justifican por medio de unos conceptos que se tendrán que definir (institucionalizar) de una o varias maneras diferentes, estos conceptos y procedimientos se tendrán que representar por algunas de las diferentes representaciones que se utilizan normalmente, etc.

Por lo tanto también es conveniente tener en cuenta en tercer lugar:

(3) *El conjunto organizado de prácticas institucionales, operativas y discursivas, que proporcionan la solución a los tipos de problemas seleccionados (contenidos procedimentales, conceptuales y formas de representación).*

Un análisis a fondo de los contenidos a enseñar, su organización, estructura, relaciones lógicas, técnicas de resolución, formas de representación, etc. es fundamental para diseñar una secuencia didáctica. Para este análisis puede ser muy útil conocer la génesis histórica de los contenidos que se quieren enseñar, ya que ésta puede ser una fuente importante de material para su enseñanza. Considerar el momento histórico en el que se desarrolla un contenido matemático lleva a hablar de sus conexiones con la ciencia de la época, con las necesidades humanas, sociales o de cualquier otro tipo que llevaron al inicio y posterior desarrollo de dicho contenido. También obliga a hablar de las aplicaciones posteriores, esperadas o que surgieron de forma imprevista. Otro elemento a destacar es que la historia también puede ayudar a resolver el problema de la motivación del alumno.

Para este tipo de análisis también puede ser muy útil el estudio de las unidades didácticas que proponen los libros de texto. Un análisis comparativo de la organización que presentan los libros de texto de primaria es un elemento importante a tener en cuenta para elaborar una propuesta de unidad didáctica. De todas maneras, el análisis que se propone ha de ser un análisis de los contenidos a enseñar que lleve a su problematización y no a una asunción acrítica tanto de los contenidos del DCB como de las organizaciones que proponen los diferentes libros de texto para su enseñanza.

Los tres puntos anteriores son los fundamentales para el diseño de unidades. Ahora bien, hay otros aspectos a tener en cuenta. El primero de ellos son los recursos y materiales didácticos, ya que estos tienen una incidencia importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje y pueden condicionar la organización, los contenidos y la metodología de la unidad didáctica. Por ejemplo, el hecho de poder usar un programa de geometría dinámica como el programa Cabri, o bien una Hoja de Cálculo puede implicar que determinados contenidos de geometría o estadística puedan ser incorporados a la unidad.

Por lo tanto, un cuarto aspecto a tener en cuenta es el siguiente:

(4) *Materiales y recursos disponibles para el estudio del tema, incluyendo los libros de texto y experiencias didácticas descritas en las publicaciones accesibles.*

Otro elemento que conviene tener en cuenta es el conocimiento de los errores y dificultades recurrentes en el estudio del tema que la investigación didáctica ha documentado. En la fase de planificación de la unidad se pueden contemplar a priori estos errores y dificultades para diseñar actividades que los tengan presentes.

Por lo tanto, un quinto aspecto a tener en cuenta es el siguiente

5. *El conocimiento de los errores y dificultades recurrentes en el estudio del tema que la investigación didáctica ha documentado*

Por último conviene tener presente un sexto aspecto, ya que, por ejemplo, la organización de una unidad no será la misma si optamos por una metodología globalizadora, por ejemplo, un proyecto de trabajo, en la que se traten conjuntamente contenidos de varios bloques (por ejemplo, geometría y medida) que si no lo hacemos, y nos limitamos a los contenidos de un solo bloque.

Por lo tanto, un sexto aspecto a tener en cuenta es el siguiente

6. *Los criterios metodológicos y de evaluación incluidos en las orientaciones curriculares, así como las recomendaciones aportadas por la investigación didáctica descritas en publicaciones accesibles.*

5.2 Diseño de una unidad didáctica

Las consideraciones anteriores se refieren a la fase de la planificación de la unidad didáctica. Pero en el diseño de una unidad didáctica, hay que contemplar una primera fase de planificación y una segunda fase propiamente de diseño. En la fase de planificación conviene tener presente el mayor número posible de los seis aspectos comentados anteriormente. Una vez hemos recogido información sobre los elementos anteriores, podemos empezar a tomar decisiones que permiten el diseño efectivo de la unidad. Esto es, concretar en actividades de aula las tomas de posición sobre los aspectos anteriores.

Con relación a las actividades diseñadas se ha de remarcar que la naturaleza de la actividad de los alumnos en clase de matemáticas es una cuestión central en su enseñanza puesto que el aprendizaje es siempre el producto de la actividad, y si esta se reduce, por ejemplo, a la resolución repetitiva de ejercicios para aplicar ciertas fórmulas esto es lo que se aprende y lo que queda en los alumnos. Por lo tanto, hay que procurar incorporar en la unidad actividades "ricas" en el sentido de que permitan superar el aprendizaje pasivo, gracias a la incorporación al proceso de enseñanza-aprendizaje, entre otros, de algunos de los siguientes aspectos:

- la actividad del alumno,
- el uso de materiales,
- problemas contextualizados,
- grupos de trabajo,
- uso de diferentes representaciones,
- la contextualización de contenidos, etc.

Tal como se comentó en el capítulo 2 al tratar el estudio dirigido de las matemáticas conviene diseñar actividades que permitan la acción, la formulación, la validación y la institucionalización.

Por otra parte, es conveniente elaborar una unidad didáctica para un alumno "promedio", que contemple actividades de refuerzo para los alumnos con más dificultades y también actividades de ampliación.

En la fase de diseño también se han de contemplar actividades de evaluación inicial, formativa y sumativa.

Las consideraciones anteriores se han de concretar en un material que, de manera indicativa, tendrá la siguiente estructura:

- Objetivos
- Contenidos
- Una breve descripción de las actividades con orientaciones metodológicas y el tipo de recurso a utilizar
- Una breve descripción de las actividades de evaluación con orientaciones metodológicas
- Una breve descripción de las posibles actividades de refuerzo y de ampliación
- Recursos y materiales
- Bibliografía
- Actividades para los alumnos

5.3. Gestión de las unidades didácticas. Adaptaciones

En el diseño de la unidad se ha previsto, muchas veces de manera implícita, una determinada gestión de aula. Por ejemplo, si la unidad incorpora una actividad en la que los alumnos han de descubrir una fórmula para hallar el número de diagonales de un polígono, el maestro en la situación de acción de los alumnos tendrá una actuación muy diferente que en la situación de validación o en la de institucionalización de los resultados obtenidos.

La gestión de la unidad puede llegar a ser más importante que las propias actividades que la componen ya que una actividad "rica", mal gestionada, normalmente termina siendo una actividad "pobre", mientras que una actividad mal diseñada, bien gestionada, se puede llegar a convertir en una actividad "rica".

A pesar de que en la planificación y el diseño de la unidad ya se ha previsto a priori una determinada gestión de aula y un determinado tratamiento de la diversidad, tenemos que pasar a analizar la gestión efectiva de aula que permite la unidad diseñada. Hay que tener en cuenta que esta unidad se va a utilizar con unos alumnos determinados sobre los cuales podemos tener mucha información de los cursos anteriores. Esta información, junto con la evaluación inicial de los alumnos y la evaluación formativa -utilizadas tal como se ha explicado en este capítulo- permiten adaptar la unidad a la diversidad de los alumnos. Esto es, la unidad didáctica se ha de adaptar, ampliar o variar para tratar la diversidad de errores y dificultades que pueden presentar los alumnos.

En la fase de gestión de la unidad, el maestro tendrá en cuenta las características de las situaciones que pueden ser modificadas por él (variables didácticas), así como los fenómenos del contrato didáctico.

De todas maneras, hay que ser conscientes de que nos podemos encontrar con determinados alumnos que necesitarán una adaptación curricular. El currículum escolar propuesto por las administraciones tiene un carácter abierto, flexible o adaptable a las necesidades o características de la comunidad educativa en la que están inmersos los centros educativos. Esta concepción permite la puesta en marcha de un proceso de adaptación curricular a diferentes niveles, hasta llegar al nivel de concreción de una Adaptación Curricular Individual (ACI). Por tanto, a los tres niveles de concreción comentados anteriormente (DCB, Proyecto de centro, unidad didáctica) hay que añadirles un cuarto nivel que son las ACI, las cuales consisten en que los tutores, maestros y maestros de apoyo, asesorados por especialistas, acomodan el currículo teniendo en cuenta las características individuales.

5.4 La evaluación de la unidad didáctica

Una vez implementada la unidad didáctica es conveniente reflexionar sobre su utilidad y sobre su posible modificación. Para poner un solo ejemplo, si se ha optado por utilizar un determinado material es conveniente formularse preguntas del tipo: ¿He conseguido integrarlo en las actividades de los alumnos?¿Qué ventajas e inconvenientes he observado cuando la actividad se realiza con ese material?¿Lo volveré a a utilizar de la misma manera?¿Qué modificaciones introduciré en la secuencia de actividades para optimizar el uso de este material? ¿Hay algún material similar que ofrezca más ventajas?, etc.

20. Selecciona un contenido matemático y planifica una semana de trabajo para un nivel de primaria determinado teniendo en cuenta los criterios y elementos descritos en esta sección. Trabaja en equipo con otro compañero.

C: Seminario didáctico

1. ANÁLISIS DE TEXTOS Y DOCUMENTOS CURRICULARES

(1) Discutir el siguiente comentario:

"El currículo está siempre en un proceso continuo de cambio con el fin de mantener un equilibrio entre las necesidades del contenido matemático, el niño y los cambios sociales ".

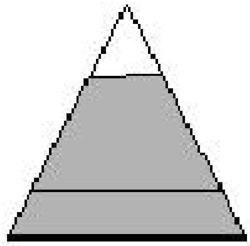
(2) Seleccionar un contenido matemático (por ejemplo, las fracciones). Comparar la manera en que se planifica su enseñanza en dos libros de texto diferentes.

(3) Seleccionar un contenido matemático (por ejemplo, la multiplicación de números naturales). Analizar su desarrollo en tres cursos en los libros de una misma editorial. Identificar lo que se repasa y lo que se incluye como nuevos conocimientos en cada nivel.

2. DIFERENTES TIPOS DE CONTENIDOS

(4) Identifica los tipos de contenidos (conceptos, procedimientos o actitudes) que pretenden evaluar las siguientes actividades:

1) ¿Se puede decir que la parte rayada del triángulo es 2/3? ¿Por qué?



2) Aproximadamente un tercio de los residuos sólidos es material combustible (papel, cartón, plásticos,...), la mitad es materia orgánica y el resto es material inerte (metales, vidrio, restos de obra,...). ¿Qué fracción de los residuos representa el material inerte? Si en un pueblo se producen diariamente 120 Kg de residuos, ¿Cuál es su composición?

3) Señalar el grado de acuerdo o desacuerdo respecto de las siguientes afirmaciones sobre las matemáticas, según el siguiente convenio:

1: Totalmente en desacuerdo; 2: En desacuerdo; 3: Neutral (ni de acuerdo ni en desacuerdo); 4: De acuerdo; 5: Totalmente de acuerdo:

1. Considero las matemáticas como una materia muy necesaria en mis estudios.

   1 2 3 4 5

2. La asignatura de matemáticas se me da bastante mal.

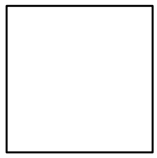
   1 2 3 4 5

3. Estudiar o trabajar con las matemáticas no me asusta en absoluto

   1 2 3 4 5

4) a) Dibuja otro polígono que tenga la misma área que este cuadrado de lado 6 m.

b) Dibuja otro polígono que tenga el mismo perímetro que este



3. ACTIVIDADES DE CAMPO

(5) **Proponer una prueba de resolución de problemas a un grupo reducido de alumnos de primaria**. Analizar las soluciones dadas por los alumnos y puntuar según la siguiente escala[1]:

Escala de puntuación de resolución de problemas	
Comprender el problema 0: Incomprensión completa del problema 1: Incomprensión o interpretación incorrecta de parte del problema 2: Comprensión completa del problema. *Planificación de la solución:* 0: No se intenta resolver o plan completamente inapropiado. 1: Plan parcialmente correcto basado en una interpretación correcta de parte del problema	2: El plan podría llevara la solución correcta si se hubiera implementado correctamente *Obtención de la solución:* 0: Sin solución, o respuesta errónea basada en un plan inapropiado. 1: Error de escritura o cálculo, respuesta parcial en un problema con varios apartados. 2. Respuesta correcta y formulación correcta.

4. DISEÑO DE SECUENCIAS DE ACTIVIDADES

(6) Preguntas para iniciar la reflexión:

a) ¿Conviene empezar a diseñar una unidad de estadística por la lectura de gráficas o bien por la confección de gráficas a partir de tablas?

b) ¿En la primaria hay que introducir la media ponderada?

[1] Reys, R. E. y cols. (2001). *Helping children learn mathematics* (Sixth edit.). New York: John Wiley. (p. 63).

c) ¿En el último curso de primaria es conveniente trabajar la estadística con la hoja de cálculo?

d) ¿Qué tipo de material y cómo se puede utilizar para hacer un gráfico de barras en el primer ciclo de primaria? .

(7) En la tabla incluida al final de este problema tienes una secuencia de 12 actividades de 6º de primaria. Reflexiona sobre esta secuencia de actividades teniendo en cuenta los siguientes aspectos[2]:

1. Organización de la actividad, gestión, recursos, etc.

a) ¿Se trata de una propuesta de trabajo colaborativo?. b) ¿Todos los alumnos pueden participar?. c) ¿Se presenta una situación que implica una actividad manipulativa?. d) ¿Qué tipo de material se utiliza? e) ¿Se trata de una tarea que permite que los alumnos realicen una actividad matemática "rica"?, f) ¿En cuál actividad el alumno tiene que dar justificaciones y argumentaciones? ¿Qué actividad se puede considerar una situación de acción? Compara la gestión de las actividades 8 y 10, etc..

2. Los contenidos y su organización

a) ¿Qué bloques del currículum se trabajan? b) ¿Se trabaja simultáneamente la geometría en tres dimensiones y la geometría en dos dimensiones?. c) ¿Cuáles son los principales contenidos que se trabajan en esta secuencia? Confecciona una tabla con los contenidos (conceptos, procedimientos y valores) que se han trabajado en cada una de las diferentes actividades.

3. Dificultades del alumno

a) Comenta las dificultades que crees que tendrán los alumnos de primaria. b) Lee y comenta el apartado "Representaciones bidimensionales del espacio tridimensional" (apartado 1.7, pp. 48-55) del libro *El aprendizaje de las matemáticas* (Dickson y cols., 1991). c) Si tienes oportunidad de que un alumno de 6º de primaria resuelva estas actividades, ¿qué tipo de dificultades has observado? ¿Qué tipo de dificultades has tenido tú para resolver estas actividades?

4. Actividades para continuar la secuencia

a) Observa que así como hay situaciones de acción o de argumentación no hay situaciones que sirvan para institucionalizar los contenidos que se han construido en el proceso de enseñanza-aprendizaje. ¿Cuáles son los contenidos que conviene institucionalizar en esta secuencia de actividades?. Diseña actividades para su institucionalización

b) Una casa ha de tener puertas, ventanas, etc. Una forma de continuar esta secuencia de actividades es que los alumnos construyan sus propias casas en base a módulos de 1 dm^3, pongan puertas, ventanas, tejado, etc.; hagan planos de su distribución, dibujen las vistas, etc. Diseña una secuencia de ampliación de las 12 actividades iniciales teniendo en cuenta estos aspectos.

[2] Font, V.(2003) La formación inicial en matemáticas de los maestros de educación primaria. Una propuesta dialógica. Actas *2º Congreso Internacional de Docencia Universitaria e Innovación*. Julio de 2002. Tarragona

c) ¿Qué escala es conveniente tomar para que la casa construida con los 4 cubos sea la maqueta de una casa razonablemente “real”? Diseña una ampliación de esta secuencia de 12 actividades que contemple el contenido "escala".

d) En la actividad 8 se ha de construir 1 dm^3 Esta actividad se suele proponer en las clases de primaria ya que una vez construido el cubo se puede plastificar con lo que se puede llenar de agua y a continuación pesar con una balanza. Esta actividad permite comprobar a los alumnos la relación entre el dm^3 , el litro y el kilogramo. Diseña una continuación de la secuencia de actividades para continuar el proyecto trabajando el volumen.

e) Antes de la secuencia inicial de 12 actividades se podría trabajar una secuencia de actividades sobre los poliminós que sirviera para justificar que sólo hay 35 hexaminós. Confecciona una propuesta de ampliación del proyecto trabajando actividades relacionadas con los poliminós.

f) El cubo y la casa son poliedros. Diseña una secuencia didáctica de ampliación en la que los alumnos primero tengan que construir otros poliedros y después tengan que resolver actividades en las que tengan que contar para cada poliedro las caras, los vértices y las aristas y, finalmente, comprobar (o bien obtener por inducción) el teorema de Euler.

g) Considera otras posibilidades de ampliación de la secuencia.

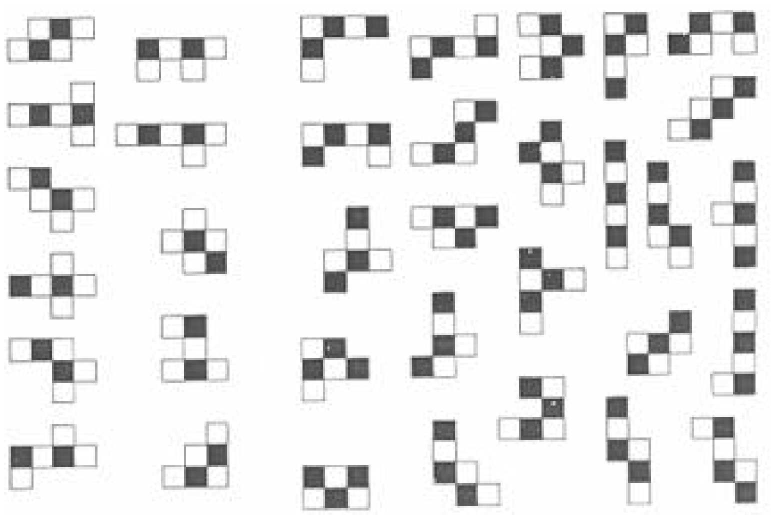
Secuencia de actividades para sexto curso:

Actividad 1: Frecuentemente has utilizado objetos con forma de cubo. Pon cuatro ejemplos.

Actividad 2: Dibuja un cubo

Actividad 3: ¿Qué es un "recortable" de un cubo? Dibuja uno.

Actividad 4: Los hexaminós son figuras formadas por seis cuadrados de manera que cada dos de ellos tengan un lado en común. A continuación tienes dibujados todos los hexaminós posibles. Entre los 35 hexaminós has de encontrar los 11 que permiten construir un cubo. Puedes dibujar el hexaminó en papel cuadriculado para poderlo recortar con unas tijeras.



Actividad 5: Un cubo tiene caras, aristas y vértices:

a) Dibuja un cubo y señala un vértice, una cara y una arista
b) ¿Cuántas caras tiene un cubo? ¿Cuántas son laterales?¿Y cuántas son bases?
c) ¿Cuántas aristas tiene un cubo?
d) ¿Cuántas caras confluyen en un vértice?

Actividad 6: Fíjate en los hexaminós que no son "recortables" de un cubo:

a) Teniendo en cuenta el número de caras que confluyen en un vértice, ¿cuáles de los hexaminós quedan descartados como "recortables"?
b) ¿Has observado alguna otra característica?

Actividad 7: Para construir un cubo a partir de un hexaminó que es un "recortable" suyo necesitamos pestañas.

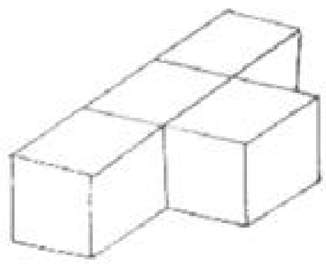
a) Dibuja un hexaminó que sea un "recortable" del cubo con las pestañas necesarias. Recórtalo y comprueba que se obtiene un cubo.
b) Repite el mismo proceso con otro hexaminó que sea un "recortable" del cubo.
c) ¿Has necesitado las mismas pestañas?¿Cuál es el número mínimo de pestañas que se necesitan?

Actividad 8: Dibuja un hexaminó que sea un recortable del cubo (con las pestañas) de lado 10 cm en una cartulina. Recórtalo y engánchalo.

Actividad 9: Cada grupo de cuatro alumnos tiene cuatro cubos. Construir una casa con estos cuatro cubos de manera que cada dos cubos se toquen.

Actividad 10: Construye todas las casas posibles. ¿Cuántas hay? Dibújalas.

Actividad 11: Pon los cuatro cubos en posición de "T" y dibuja las vistas (alzado, planta y perfil)



Actividad 12: a) Construye un "recortable" -con las pestañas necesarias- que permita construir una casa. El modelo más simple es la casa de cuatro cubos en forma de "T", pero también se puede hacer con casas de más de 4 cubos.

b) Construye la casa con una cartulina y de manera que las aristas sean de 10 cm.

BIBLIOGRAFÍA

Burgués, C. (2000). El currículum de primaria. En, J.M. Goñi (Coord.), *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI* (pp. 59-66). Barcelona: Graó.

Flores, P. (2001). Aprendizaje y evaluación. En, E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 41-60). Madrid: Síntesis. (apartado 2.2)

Giménez, J. (1997). *Evaluación en Matemáticas. Una integración de perspectivas.* Madrid: Síntesis.

Gorgorió, N., Artigues, F., Banyuls, F., Moyano, D., Planes, N., Roca, M. y Xifré, A. (2000). Proceso de elaboración de actividades geométricas ricas: un ejemplo, las rotaciones. *Suma*. 33: 59-71.

Jorba, J. y Casellas E. (1997). *La regulación y la autoregulación de los aprendizajes*. Madrid: Síntesis.

Rico, L. (2001). Matemáticas en educación primaria. En, E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en Educación Primaria* (pp. 23-40). Madrid: Síntesis.

Secada,W.G., Fennema, E. y Adajian,L. B. (Comps) (1997). *Equidad y enseñanza de las matemáticas: nuevas tendencias*. Madrid: MEC-Morata.

Capítulo 4

RECURSOS PARA EL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS

A: Contextualización

REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN SOBRE LOS RECURSOS DIDÁCTICOS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Consigna:

A continuación se presenta un extracto de un documento sobre el uso de recursos didácticos en la enseñanza de las matemáticas en primaria.

1) Léelo con atención. Subraya los puntos que consideras especialmente acertados.
2) ¿Qué papel da a los alumnos en su proceso de aprendizaje? ¿Qué requisitos se sugieren para las situaciones didácticas a proponer en la clase de matemáticas?
3) ¿Por qué se destaca la importancia del material manipulativo? ¿En qué forma se sugiere su uso?
4) ¿Cómo debe complementar el profesor el uso del material didáctico?
5) Si no estás de acuerdo con alguno de los enunciados, indica tus razones.

Extracto del documento:

Para ayudar a los chicos y chicas de tercer ciclo a construir conocimientos matemáticos es preciso **combinar varios factores en una secuencia de aprendizaje:**

* Por un lado, es importante proponerles situaciones en las que tengan un papel activo, es decir, plantearles algo que tengan que hacer, por ejemplo: distribuir cosas entre..., buscar todos los que tengan..., construir una figura que sea..., y, a ser posible, que tengan una implicación personal en la propuesta, ya sea porque corresponda a alguna situación de la vida diaria o a algunas de sus aficiones; aunque esto último no siempre resulta fácil, cuando se consigue, el interés y la significatividad de la propuesta aumentan notablemente y se obtienen mejores resultados.
* Igualmente, es importante ofrecer material que ayude a representar la propuesta: cubos, ábacos, instrumentos de medida, cuerpos geométricos o material para construirlos, etc., es decir, algo que permita que, al pensar maneras de resolver una determinada cuestión, se pueda materializar y comprobar los resultados de una manera física. Si, por ejemplo, les proponemos que busquen distintas maneras de dividir un cuadrado en partes iguales y disponen de un cuadrado de papel, podrán doblarlo o recortarlo y comprobar así algunas de las combinaciones que se les ocurran.
* La manipulación, siempre que sea posible, no debería ser silenciosa; debemos intentar que describan lo que están haciendo, que evoquen lo que hicieron en otro momento, motivarles con preguntas para que hagan conjeturas, expresen lo que están considerando y que lo discutan con sus compañeros. Obtendremos así varios efectos beneficiosos: uno de ellos es provocar la verbalización, cosa que influye de manera muy determinante en la clarificación de las propias ideas y en la elaboración de conceptos; otro es el establecimiento de un intercambio, una discusión entre iguales que fomenta la seguridad y la confianza en uno mismo, actitud que resulta fundamental en el aprendizaje de las matemáticas; además, en el transcurso de estas discusiones, podemos ayudar a considerar el error no como un fracaso, sino como una forma de aproximación a la solución adecuada.

* Es importante también ayudar a generalizar, a encontrar “la norma”, para lo cual hay que promover experiencias similares que consideren un abanico de ejemplos suficientes y representativos que sirvan de referencia, y conducir, con preguntas y ejemplos, el pensamiento de los niños hasta llegar a la conceptualización. Obtendrán así una definición o una norma que, por ser elaborada a partir de experiencias concretas y con la práctica y la discusión, tiene un valor totalmente distinto al de la definición que se podría haber dado a un alumno considerado receptor.

* No hay que olvidar tampoco la importancia de la mecanización. Las matemáticas hay que comprenderlas, pero también hay que practicarlas con el fin de alcanzar un dominio que permita utilizarlas economizando esfuerzos; por lo tanto, deben proponerse también ejercicios encaminados a conseguir una automatización de determinadas habilidades.

Este planteamiento de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas contrasta con el que muchos de nosotros hemos vivido como alumnos cuando el lápiz y el papel, la tiza y la pizarra eran los únicos elementos que acompañaban la explicación del maestro; explicación que se limitaba, en muchos casos, a dar unos enunciados que se debían memorizar, que nadie podía discutir, ni siquiera comentar, y que representaban el preludio de una serie de ejercicios que hay que resolver.

Desde entonces han cambiado muchas cosas: los niños tienen libros de texto agradables y bien ilustrados y pueden, por supuesto, comentar y preguntar con mucha más libertad a su maestro, pero debemos plantearnos hasta qué punto hemos conseguido cambiar la idea de fondo y si realmente admitimos que para aprender hay que reelaborar los conocimientos en un proceso en el que es preciso tantear soluciones, comentar ideas y razonar resultados, y en el que cada cual participa a la vez de forma individual y como miembro de una colectividad. Nuestras ideas respecto a este tema imprimirán un cariz decisivo al aprendizaje que fomentemos, e influirán más, por supuesto, que el material que utilicemos.

B: Desarrollo de conocimientos

1. INTRODUCCIÓN

En las distintas propuestas de reforma del currículo matemático de las comunidades autónomas españolas, y de otros países, se sugiere el uso de materiales didácticos (generalmente de tipo manipulativo o visual) como un factor importante para mejorar la calidad de la enseñanza. El uso de recursos manipulativos como el geoplano, tangram, ábacos, material multibase, dados, fichas, etc. se presenta como "casi obligado" en los niveles primarios y secundarios. Estas propuestas vienen apoyadas por instituciones prestigiosas como el NCTM, que ha dedicado varias publicaciones a este tema. También en España los profesores se han preocupado por el tema; por ejemplo, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas organizó unas jornadas específicas sobre el tema.

Uno de los argumentos en que se apoyan estas orientaciones es que se supone que los materiales manipulativos ayudan a los niños a comprender tanto el significado de las ideas matemáticas como las aplicaciones de estas ideas a situaciones del mundo real. Sin embargo, es necesario profundizar sobre el sentido, fundamento y problemática que plantea a los profesores y a los investigadores en didáctica de las matemáticas el uso de materiales "manipulativos" en el estudio de las matemáticas.

Este capítulo tiene dos objetivos principales:

- Proporcionar al profesor en formación un marco conceptual que le ayude a tomar una posición crítica y constructiva sobre el uso de los recursos didácticos, y en particular los materiales manipulativos, en la enseñanza de las matemáticas.
- Hacerle reflexionar sobre la complejidad del uso de los materiales concretos debido a las relaciones nada simples que existen entre los materiales, las situaciones didácticas y los diversos lenguajes utilizados en la construcción de los conceptos y estructuras matemáticas.

2. RECURSOS DIDÁCTICOS

Son muchos los posibles recursos didácticos que podemos usar en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Ejemplos

- Los propios libros de texto, cuadernos de ejercicio, pizarra, lápiz, papel e instrumentos de dibujo o la calculadora que usamos habitualmente en clase son recursos didácticos, puesto que ayudan al alumno en su aprendizaje y al profesor en la enseñanza.
- Cuando se enseña a los niños a contar, se puede usar como recurso los propios dedos de las manos, piedrecillas, regletas Cuisenaire, material multibase, etc.
- Juegos habituales, tales como la oca, parchís, ruleta, dominó, dados, cartas, pueden ayudar a los niños a comprender la idea de azar y probabilidad.

- Recursos didácticos más sofisticados incluyen los documentales grabados en vídeo sobre aspectos concretos de las matemáticas, los programas didácticos de ordenador y recientemente los recursos en Internet.

Para comprender mejor la importancia de los recursos o material didáctico, se usan diferentes clasificaciones de los mismos. Una de ella consiste en diferenciar dos tipos de recursos:

- *Ayudas al estudio*: recursos que asumen parte de la función del profesor (organizando los contenidos, presentando problemas, ejercicios o conceptos). Un ejemplo lo constituyen las pruebas de autoevaluación o los programas tutoriales de ordenador, etc. También se incluyen aquí los libros de texto, libros de ejercicios, etc.
- *Materiales manipulativos que apoyan y potencian el razonamiento matemático*: Objetos físicos tomados del entorno o específicamente preparados, así como gráficos, palabras específicas, sistemas de signos etc., que funcionan como medios de expresión, exploración y cálculo en el trabajo matemático.

1. ¿Qué tipos de recursos usas o has usado personalmente en el estudio de las matemáticas? ¿Cuáles te han sido más útiles?

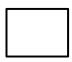
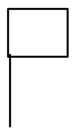
2. En la década de los 80 estuvo en auge el lenguaje de ordenador LOGO. En este lenguaje los niños pueden dar órdenes a una "tortuga" que se desplaza por la pantalla del ordenador y "conoce", entre otras, las órdenes avanza (AV) gira derecha (GD), gira izquierda (GI) y REPITE. Además se puede enseñar a la tortuga nuevas palabras mediante el comando PARA.

Una vez aprendidas nuevas palabras, se puede dar órdenes a la tortuga utilizándolas. Como ejemplo, mostramos las instrucciones para enseñar a la tortuga las palabras cuadrado y bandera.

a. ¿Clasificarías el lenguaje LOGO de ayuda al estudio o de instrumento semiótico?

b. ¿Qué complemento sería necesario para que el lenguaje LOGO cumpliese ambas funciones?

c. Busca algunos libros sobre lenguaje LOGO y analiza qué parte o partes de las matemáticas pueden beneficiarse del uso de este recurso.

PARA CUADRADO REPITE 4 AV 50 GD 90		PARA BANDERA AV 50 CUADRADO	

3. AYUDAS AL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS

3.1. Los libros de texto y apuntes

El recurso didáctico más común en la enseñanza de cualquier tema es el libro de texto. Por ello es importante tener un criterio para elegir los que se han de recomendar a los alumnos. El libro de texto "conserva y transmite" de alguna formal el conocimiento matemático, puesto que el alumno lo usa como referencia, cuando tiene que resolver un problema o recordar una definición o propiedad.

Hay que tener en cuenta además que las matemáticas que se presentan en un libro destinado a los niños son muy diferentes de las matemáticas que usan los matemáticos (por ejemplo, la que encontramos en un texto universitario). En el capítulo 1 ya hemos comentado que en didáctica se habla de *transposición didáctica* para referirse al cambio que el conocimiento matemático sufre para ser adaptado como objeto de enseñanza. La transposición didáctica es necesaria porque:

- Hay que seleccionar y secuenciar las partes de las matemáticas que se van a enseñar a los alumnos de un cierto nivel escolar.
- Hay que adaptarlas para hacerlas comprensibles a los niños; para ello se requiere prescindir de la formalización y usar un lenguaje comprensible para ellos.
- Hay que buscar ejemplos, problemas y situaciones que interesen a los niños y que permitan a los alumnos apropiarse de los conocimientos pretendidos.

> 3. Compara la presentación de los números naturales en tu texto de matemáticas (por ejemplo, en el capítulo 1 de este Manual) con la que se hace en los libros de texto de primer a tercer curso de primaria. ¿Qué diferencias observas? ¿Cómo se ha secuenciado el tema para hacerlo asequible a los alumnos? ¿Son los ejemplos presentados a los niños los mismos que los presentados en el texto para la formación del profesor?

La importancia del libro de texto es resaltada en diversos documentos:

- En el denominado Informe Cockcroft[1] se afirma que "los libros de texto constituyen una ayuda inestimable para el profesor en el trabajo diario del aula".
- En Rico[2] encontramos que "El libro proporciona seguridad y continuidad en los puntos de vista, facilita la imagen de que el conocimiento es algo localizado, que se puede encontrar fácilmente y con respecto al cual el único trabajo posible consiste en su asimilación. Su determinación ya está hecha, y su base fundamentalmente es "científica", apoyada por la tradición y la experiencia. Como el libro supone un gran esfuerzo de síntesis, planificación, estructuración y acomodación de contenidos, por encima de la capacidad del profesor medio, se considera el paradigma del conocimiento que hay que transmitir".
- Romberg y Carpenter[3] por su parte indican que "el libro de texto es visto como la autoridad del conocimiento y guía del aprendizaje. La propiedad de las matemáticas descansa en los autores del libro de texto y no en el maestro".

Quizás en estas citas hay también una advertencia velada: el profesor debe ser cuidadoso y hacer un uso crítico de los libros de texto. No todos ellos son igualmente valiosos. Más allá de que la presentación sea agradable, que los ejercicios y problemas sean interesantes hay que cuidar que el contenido sea adecuado y que el significado que se presente de las matemáticas esté carente de sesgos.

[1] Cockcroft, W. H. (1985). *Las Matemáticas sí cuentan*. Madrid: MEC (p.114).
[2] Rico, L. (1990). Diseño curricular en Educación Matemática: Una perspectiva cultural. En S. Llinares, y V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en Educación Matemática (pp. 17-62). Sevilla: Alfar* (p.22).
[3] Romberg, T. A. y Carpenter, T. P (1986). Research on teaching and learning mathematics: Two disciplines of scientific inquiry. En M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 850-869). New York: McMillan (p. 867).

Además de los libros de texto, los cuadernos de ejercicios, esquemas y apuntes de los alumnos son también herramientas importantes en el aprendizaje. Los apuntes también pueden proporcionar información al profesor sobre lo que sus alumnos aprenden.

> 4. Compara el tema de fracciones en dos libros de texto de primaria diferentes. ¿Cuál te parece más completo y por qué? ¿Puedes observar algún sesgo, por ejemplo, la falta de un punto importante para el aprendizaje de los alumnos?
>
> 5. Consigue unos apuntes de dos de tus amigos tomados en la clase de matemáticas y compara con los tuyos propios. ¿Puedes detectar algún punto incorrectamente comprendido? ¿Qué partes de la lección fueron recogidas por los tres estudiantes? ¿Cuáles sólo por alguno de ellos? Si tú fueras el profesor, ¿cómo podrías usar estos apuntes para mejorar tu acción docente?

3.2. Las tareas matemáticas y situaciones didácticas entendidas como recurso. Variables didácticas

Desde una perspectiva muy general podemos considerar que las tareas que se proponen en la clase de matemáticas son un recurso didáctico que puede controlar el profesor. En el capítulo 2 sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, destacamos que al resolver estas tareas el alumno dota de significado a los conceptos matemáticos y también describimos las características deseadas en las tareas matemáticas.

Estas tareas toman diversas formas en los libros de texto y en el material elaborado por el profesorado, pero los ejemplos y ejercicios son una parte importante. Una práctica común en los libros de texto es mostrar al alumno algunos ejemplos del concepto antes o después de haberlo definido y estudiado sus propiedades y luego asignarle algunos ejercicios para reforzar el aprendizaje. Esta práctica se justifica porque se supone que se gana maestría en el tema a través del trabajo con los ejercicios y de los ejemplos mostrados del concepto.

Por otra parte, el aprendizaje matemático no es consecuencia directa y exclusiva de la confrontación de los alumnos con tareas más o menos problemáticas. Los problemas matemáticos propuestos en clase formarán parte de dispositivos más generales y complejos que son las secuencias de *situaciones didácticas*. Estas secuencias de situaciones, tal como ya hemos comentado en el capítulo 2 al analizar el estudio dirigido de las matemáticas, deben contemplar no sólo los momentos de la acción/ investigación personal de los alumnos con las tareas - fase para la cual el material tangible puede desempeñar un papel importante - sino que deben diseñarse e implementarse, además, momentos de formulación /comunicación de las soluciones, justificación /discusión de las mismas, institucionalización de los conocimientos pretendidos (compaginar las técnicas, el lenguaje y los conceptos puestos en juego con la cultura matemática correspondiente).

> 6. Propón una lista de ejercicios sobre la multiplicación de fracciones. Inventa una situación didáctica a partir de la cual el alumno pueda llegar a comprender para qué se necesita la multiplicación de fracciones.

Variables didácticas

La resolución de problemas ha sido una de las áreas de investigación de mayor impacto en la didáctica de las matemáticas. Los investigadores interesados en entender la interacción entre el estudiante y la tarea de resolución de problemas han analizado las tareas presentadas, las características de los estudiantes, de la situación de evaluación, la enseñanza recibida y otros puntos, tratando de ver cuáles de ellos influyen tanto en el éxito del alumno al resolver el problema como en su aprendizaje.

En la bibliografía sobre resolución de problemas se suele diferenciar tres tipos principales de variables, que, en nuestra opinión, se puede extender a casi todo tipo de tarea matemática:

- *variables del problema:* en un mismo problema o tarea, ligeras variaciones en el enunciado, pueden variar su dificultad, las estrategias con que los alumnos tratan de resolverlo o bien los contenidos matemáticos de la tarea.
- *variables del sujeto:* los alumnos tienen diversas capacidades, intereses, actitud e historia. Las circunstancias sociales y familiares también pueden influir, por ejemplo, el apoyo de sus padres en el estudio o los medios que éstos le proporcionan.
- *la situación de resolución*, herramientas disponibles, si se trabaja sólo o en grupo, etc.

Interesa destacar aquellas variables cuyo control se puede considerar como un recurso del profesor, es decir sobre las que podemos actuar y que producen un cambio significativo en lo que el alumno aprende: son las llamadas *variables didácticas*. Generalmente son variables de tarea o de la situación; pero también a veces se puede actuar sobre las variables del sujeto, por ejemplo, tratando de aumentar el interés o mejorar la actitud de los alumnos.

> 7. Considera el siguiente ejercicio. Identifica posibles variables de tarea y escribe el enunciado de otros ejercicios similares, variando estas variables.
>
> *Juan y María juegan a lanzar dos monedas. Si salen dos caras Juan gana un euro y en otro caso María gana un euro. ¿Es equitativo el juego? ¿Cuánto tiene que ganar María para que el juego sea equitativo?*

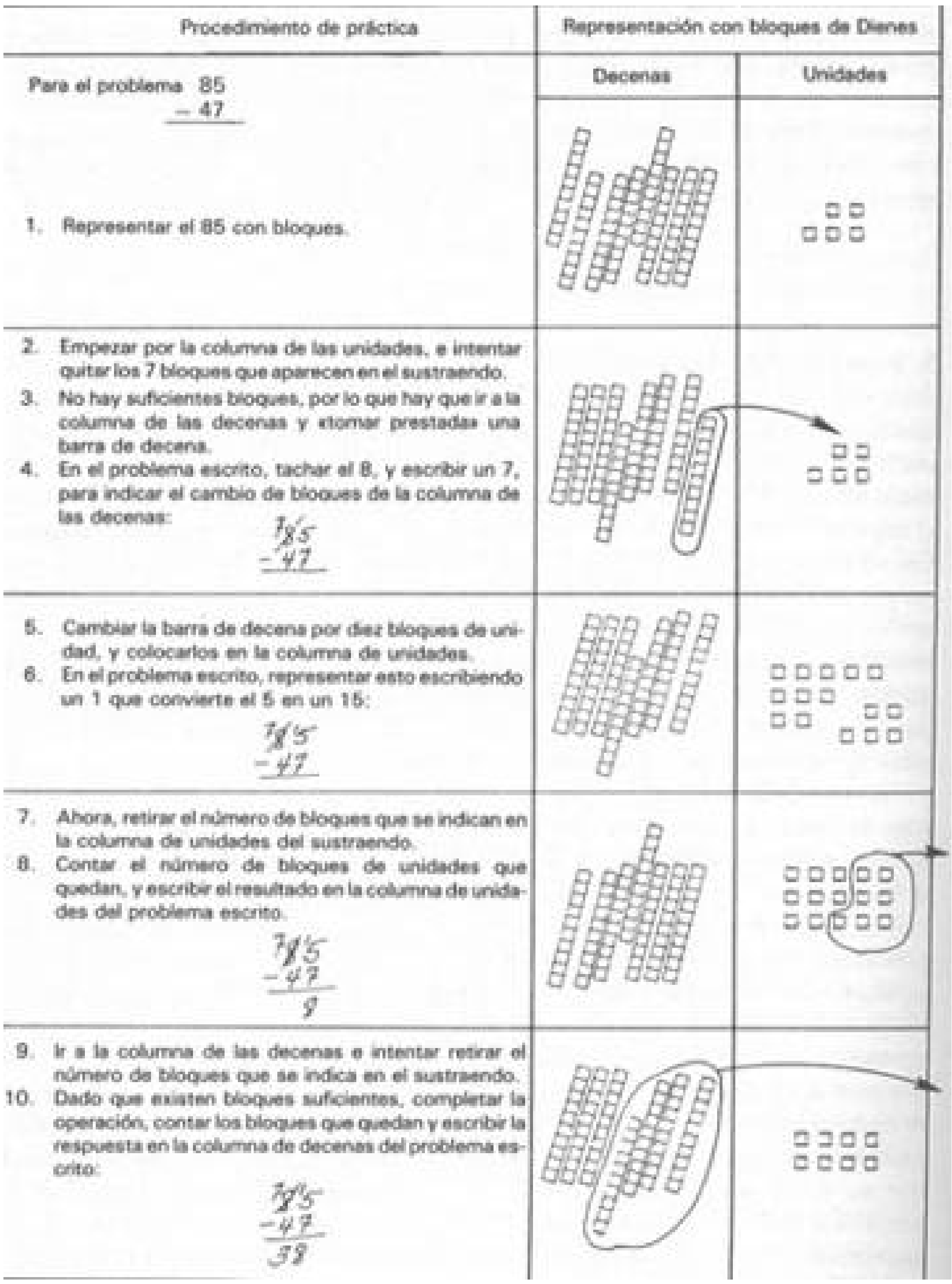
4. MATERIAL MANIPULATIVO

A continuación planteamos unas reflexiones sobre esta segunda clase de recursos didácticos, que, en realidad, constituyen los instrumentos semióticos del trabajo matemático (sea éste profesional o escolar). Nos referiremos a ellos con el nombre genérico de *manipulativos* y distinguiremos dos tipos, "manipulativos tangibles" y "manipulativos gráfico-textuales-verbales":

- "*Manipulativos tangibles*" –que ponen en juego la percepción táctil: regletas, ábacos, piedrecillas u objetos, balanzas, compás, instrumentos de medida, etc. Es importante resaltar que los materiales tangibles también desempeñan funciones simbólicas. Por ejemplo, un niño puede usar conjuntos de piedrecillas para representar los números naturales.

Ejemplo

En Resnick y Ford[4] se describe el caso de Leslie, una niña de 9 años que utilizaba sistemáticamente una regla defectuosa para la resta, a saber, la de restar el número menor del mayor en cada columna, sin tener en cuenta cuál era el sustraendo y cuál el minuendo. Leslie realizaba manipulaciones simbólicas con los números pero no les atribuía un significado. Estas manipulaciones simbólicas pueden ser "concretadas" de manera tangible con un material: los bloques de base diez de Dienes. Este material fue usado con Leslie para dar un significado concreto a sus manipulaciones con símbolos numéricos de la manera siguiente:



- "M*anipulativos gráfico-textuales-verbales*" –en los que participan la percepción visual y/o auditiva; gráficas, símbolos, tablas, etc. Es importante resaltar que este

[4] Resnick, L. B. y Ford, W. (1991). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona: Paidós-MEC (pp. 248-252).

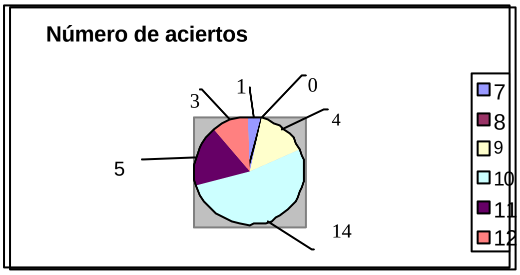
segundo tipo de objetos -gráficos, palabras, textos y símbolos matemáticos, programas de ordenador- también pueden manipularse, pues podemos actuar sobre ellos. Sirven como medio de expresión de las técnicas y conceptos matemáticos y al mismo tiempo son instrumentos del trabajo matemático.

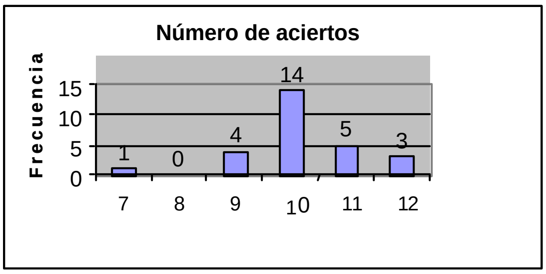
El carácter dinámico y "manipulable" de los sistemas de signos matemáticos está siendo potenciado recientemente por el uso de las nuevas tecnologías en las distintas ramas de las matemáticas (Geometría, Cabri; Análisis de datos, Statgraphics; Cálculo, Derive; etc.)

Ejemplo

Las gráficas siguientes están realizadas con la hoja de cálculo EXCEL, disponible en la mayor parte de los ordenadores. En EXCEL u otras hojas electrónicas, los alumnos pueden introducir sus datos, realizar con ellos cálculos (lo que le obliga a pensar la fórmula correspondiente para obtener el resultado deseado) y pasar de un gráfico a otro. Cada gráfico se puede manipular de diversas formas, cambiando, por ejemplo, las escalas, rótulos, números de datos.

Cada una de estas gráficas, y el mismo listado de datos en la hoja constituye un sistema diferente de representación que visualiza distintos conceptos matemáticos. Por ejemplo, mientras el gráfico de sectores visualiza mejor la proporción que cada dato representa del total (frecuencia relativa, fracción como parte-todo) el gráfico de barras visualiza mejor la frecuencia absoluta, así como la idea de escala numérica para las frecuencias. En el caso de datos numéricos también visualiza mejor la tendencia central (moda) y dispersión).





8. La tabla 100

La tabla que reproducimos a continuación muestra una disposición de los números del 0 al 99 que se conoce como la “tabla 100”; una variante puede ser comenzar desde 1.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

a. Inventa algunas tareas utilizando esta tabla que sean útiles para el aprendizaje de la serie numérica, ligadas al descubrimiento de patrones o regularidades en la disposición de los números.

b. ¿Cómo se manipulan los números de la tabla para descubrir los patrones?

c. ¿Qué objetos matemáticos se representan en la tabla? ¿Cuáles se pueden representar mientras buscamos los diferentes patrones?

d. Construye una tabla similar para un sistema de numeración diferente (por ejemplo, en base 5). ¿Cómo se modifican ahora los patrones que habías encontrado para la tabla 100?

4.1. Funciones del material textual

Las funciones que pueden desempeñar los materiales manipulativos en la enseñanza de las matemáticas elementales se explican porque algunas teorías ampliamente aceptadas sobre el aprendizaje de las matemáticas dan un peso importante a las relaciones entre lenguaje y pensamiento y conceden, por ello, gran relevancia a los medios de expresión en la actividad y el estudio de las matemáticas.

No podemos olvidar que tanto las situaciones didácticas, problemas y tareas que proponemos a los niños como los objetos abstractos que ellos deben evocar para resolverlos (por ejemplo, la ideas de número, operación, suma, propiedad asociativa, ...) requieren del lenguaje para ser comunicadas por los niños a su profesor o compañeros, o incluso para pensar en ellas.

Ejemplo:

Los símbolos matemáticos permiten expresar cantidades, realizar operaciones, fijar procesos y resultados intermedios, localizar y corregir posibles errores, obtener reglas y algoritmos estrechamente ligados a tales expresiones simbólicas. Por ello, el cálculo escrito potencia el cálculo mental, que no es sino la manipulación interiorizada de los lenguajes tangibles, verbales y gráfico-textuales.

9. Reproducimos a continuación un problema y las soluciones al mismo de tres alumnos. ¿Qué objetos matemáticos representan los símbolos en cada una de las tres soluciones? ¿Cómo operan los alumnos con dichos símbolos? ¿Cómo puede utilizar el profesor las respuestas para detectar errores de comprensión?

Problema. Maria y Pedro dedican una media de 8 horas cada fin de semana a hacer deporte. Otros 8 estudiantes dedican cada semana una media de 4 horas a hacer deporte. ¿Cuál es el número medio de horas que hacen deporte cada fin de semana los 10 estudiantes?.

$$\frac{8+8+4+4+4+4+4+4+4+4}{10} = \frac{16+16+16}{10} = \frac{48}{10} = 4'8 \text{ horas}$$

$$m = \frac{2\cdot 8+8\cdot 4}{10} = 4'8 \text{ horas/estudiante}$$

He hecho los cálculos con proporciones y con el resultado he sumado las medias.

$$\frac{7 \text{ días}}{4 h} = \frac{2 \text{ días}}{1'1 \ h} \qquad 1'1 \ h + 8 h = \boxed{9'1 \ h}$$

Los sistemas de signos matemáticos desempeñan un papel esencial en el trabajo matemático, de manera que el progreso en la puesta a punto de tales recursos está fuertemente relacionado con el avance de las matemáticas.

Pero no todos los instrumentos semióticos son igualmente eficaces para resolver problemas matemáticos. Pensemos, por ejemplo, en la eficacia del sistema de numeración decimal (numerales indo-arábigos) frente a una representación simple mediante, piedrecillas o el sistema de numeración romano; o también, en la mayor eficacia del registro escrito algebraico frente al registro oral característico de la aritmética tradicional.

10. Intenta resolver el siguiente problema suponiendo que no puedes utilizar el álgebra (por ejemplo por tanteo como lo podría resolver un alumno de primaria). Después vuelve a resolverlo utilizando las ecuaciones (por ejemplo como lo resolvería un alumno de secundaria)

a) La edad de Ana es el triple de la edad de Alberto. Las dos edades suman 32. Halla estas edades por tanteo completando la tabla siguiente:

Edad de Alberto	Edad de Ana	Suma de las dos edades
2	3 · 2 = 6	2 + 6 = 8 El resultado es menor
12	3 · 12 = 36	12 + 36 = 48 El resultado es mayor
6	3 · …. = ….	6 + …. = ….
….		

b) Resuelve el problema anterior utilizando ecuaciones

Una vez reconocidos los papeles instrumentales y representacionales (semióticos) de los recursos manipulativos en la actividad matemática tenemos que analizar su eficacia relativa, el espacio y circunstancias en las que cada manipulativo se revela como mejor adaptado a la función requerida. Así, por ejemplo, diversas investigaciones han mostrado que la aritmética oral es más eficaz que la escrita en ciertos contextos etnomatemáticos; que el ábaco japonés puede superar en eficacia a la calculadora; que, como dice el proverbio, "una imagen vale más que mil palabras". Pero tales ventajas se restringen a ámbitos reducidos y específicos frente a la generalidad de los "manipulativos textuales", como se refleja en el uso del lenguaje algebraico en la mayor parte de las matemáticas.

11. Realiza la suma: 14278 + 1799 + 93219: a) mentalmente; b) usando numeración romana; c) usando el algoritmo habitual de la suma. ¿Cuál de los tres métodos te parece más eficaz? ¿Qué papel representan los símbolos manipulativos en cada uno de los tres sistemas?

12. Da una lista de situaciones de la vida diaria en que habitualmente se use la aritmética oral.

4.2. El material manipulativo como puente entre la realidad y los objetos matemáticos

Gran parte de la actividad matemática puede ser descrita como procesos de modelización, en el que interpretamos de forma abstracta, simplificada e idealizada un objeto, un sistema de relaciones o un proceso evolutivo que surge de la descripción de la realidad. La construcción de modelos matemáticos, su comparación con la realidad, y su perfeccionamiento progresivo intervienen en cada fase de la resolución de problemas matemáticos, no sólo relacionados con situaciones prácticas, sino también en el trabajo de desarrollo teórico. Este proceso seguiría las cinco fases siguientes:

1. Observación de la realidad
2. Descripción simplificada de la realidad
3. Construcción de un modelo
4. Trabajo matemático con el modelo
5. Interpretación de resultados en la realidad

Ejemplo:

Supongamos que quiero estimar el tiempo que debo esperar cada día en la parada del autobús que tomo para ir a la facultad. En el paso 1 observaré durante algunos días el tiempo que espero, para diferenciar, si es o no constante. Si observo bastante variación y es difícil predecir el tiempo exacto de espera, consideraré que estoy en una situación aleatoria. Para ello debo admitir que la situación es, por lo menos potencialmente, reproducible (tengo que esperar al autobús más de una vez en condiciones similares) y que tiene diferentes resultados posibles, sin que sepamos con seguridad cuál será el que ocurrirá en una experiencia particular (no sé con seguridad el tiempo que debo esperar en la parada a que aparezca el autobús).

Una vez aceptada la aleatoriedad de la situación, en el paso 2 debemos realizar una descripción simplificada de la misma que nos permita pasar de la realidad observada (paso 1) a la construcción del modelo (paso 3). Para ello tomamos unos aspectos de la situación y prescindimos de otros. En el ejemplo del autobús deberemos decidir qué parada elegimos, si esperamos un autobús dado (el número 1) o si contamos el tiempo hasta que aparezca en la parada cualquier autobús. También si diferenciamos la hora del día o el día de la semana o no.

Al comenzar la construcción del modelo (punto 3) de nuevo se precisan una serie de decisiones: ¿aceptamos que el tiempo de llegada del próximo autobús es independiente del que acaba de llegar? ¿trataremos los tiempos como una variable continua? ¿cuáles son otras variables, además del tiempo de espera que me podrían interesar en el trabajo con el modelo?

Una vez que hemos construido un modelo matemático para la situación (por ejemplo aceptamos que los tiempos de espera varían entre 10 y 30 minutos y cualquier tiempo en este intervalo es equiprobable) puedo trabajar con el modelo para obtener resultados "matemáticos".

Finalmente queda todavía la parte más importante: comparar estas conclusiones con el comportamiento real de la situación analizada y decidir que el modelo matemático elegido nos proporciona una buena descripción de la realidad.

El propósito de construir un modelo es obtener una mejor comprensión de una parte de nuestro universo y, así, poder predecirla y si es posible controlarla. Un modelo no es "real", ni tampoco "verdadero"; en el mejor de los casos es consistente y concordante con las observaciones. Esto se olvida con facilidad y se suele confundir "modelo" y "realidad".

Por otro lado, todos los pasos 1 a 5 son igualmente importantes en la actividad de modelización. Sin embargo, en la clase de matemáticas, con frecuencia nos apresuramos a correr a los pasos 3 y 4 (las "verdaderas" matemáticas) con lo que se impide al alumno apreciar la relación entre matemáticas y realidad así como la aplicabilidad y limitaciones de las matemáticas.

13. Da otros ejemplos de situaciones reales que puedan ser estudiadas con ayuda de un modelo matemático. Para cada una de ella indica en qué forma simplificamos la realidad para poder modelizarla, qué tipo de modelo matemático utilizamos y cómo podemos comprobar que el modelo es útil para describir la realidad.

Utilidad del material tangible en la actividad de modelización

Algunas veces la parte formal del modelo matemático (puntos 3 y 4 del proceso) es demasiado abstracta para la edad de los alumnos, quienes, sin embargo, podrían comprender bien los pasos 1, 2 y 5, así como adquirir al menos intuitivamente alguna comprensión sobre el modelo matemático o sobre alguna de sus propiedades y relaciones. Una pregunta que se plantea el profesor en estos casos es si sería posible llevar a cabo un estudio intuitivo de un problema o de un tema, con ayuda del material concreto o tangible. Aunque este estudio no sería todavía un estudio matemático particular, podría preparar al alumno para una comprensión posterior más completa.

Ejemplo:

Supongamos que planteamos a unos alumnos de primaria la tarea de encontrar cuál de todos los rectángulos de perímetro dado tiene área máxima y, posteriormente, cuál de todos los polígonos regulares de perímetro dado tiene área máxima.

Un estudio formal podría no estar a su alcance, porque se necesitaría la idea de función, para escribir el área en función del perímetro, y también la idea de derivada así como la capacidad de derivar que se adquiere sólo al final de la secundaria.

Sin embargo, podemos proporcionar a los alumnos algunos materiales concretos que les permitan explorar el problema y llegar a una conjetura. Algunos de estos materiales podrían ser:

- Una hoja de papel cuadriculado; podrían tratar el primer problema en forma aproximada, solo para valores discretos, es decir cuando solo se toman medidas enteras del perímetro y área.
- un geoplano y una cinta de longitud fija, no elástica, junto con una regla para medir, papel lápiz y calculadora ordinaria.
- Una calculadora gráfica.
- Un microordenador, dotado de Lenguaje LOGO que el alumno pueda programar.
- Un ordenador dotado del lenguaje CABRI.

Observamos en el ejemplo, que no siempre llegamos a la parte de formulación matemática. Sin embargo, en todos los casos hemos comenzado una actividad de modelización, que será diferente según el material udilizado. Entre el *dominio de la realidad* en que se encuentra la situación que queremos analizar y el *dominio teórico* donde, con ayuda de las matemáticas construimos un modelo teórico que debe, por un lado, simplificar la realidad y abstraer sólo sus aspectos esenciales y, por otro, ser útil para interpretar los caracteres retenidos en la modelización, podemos situar el *dominio pseudo- concreto* en el que podemos trabajar con los alumnos por medio del material.

En el dominio pseudo-concreto el alumno ya ha salido de la realidad y trabaja con una situación, que siendo ya abstracta e idealizada, permite "concretar" y dar significado a los conceptos y símbolos característicos del dominio teórico, e incluso prescindir de determinados símbolos y representaciones formales que a ciertas edades pueden dificultar más que facilitar la comprensión de los alumnos.

Ejemplo

Cuando el alumno trabaja sólo con papel cuadriculado, prescinde de posibles valores no enteros para los lados de los rectángulos. También supone que todos los cuadros de la cuadrícula son perfectamente cuadrados, prescindiendo de posibles irregularidades. Al mismo tiempo conserva la denominación rectángulo, cuadrado para los resultados de sus dibujos, que pudieran no ser perfectamente regulares. El papel didáctico del modelo pseudo-concreto es inducir implícitamente el modelo teórico a los alumnos, incluso aunque su formulación matemática formalizada no sea posible.

14. Analizar qué simplificaciones de la realidad se hacen para resolver el problema propuesto con cada uno de los materiales sugeridos en el ejemplo anterior. Describir la actividad matemática que se lleva a cabo en el trabajo con cada uno de dichos materiales.

En definitiva, el trabajo con material es muy importante en las primeras etapas de la educación matemática. Las metáforas de "manipular y ver los objetos matemáticos" son esenciales para la comprensión matemática.

4.3. Algunas precauciones

Como toda metáfora, el uso del material concreto en el aprendizaje de las matemáticas resalta unos aspectos de los conceptos que tratamos de enseñar y ocultan otros, por lo que debemos prestar una atención cuidadosa en su uso.

Cuando trabajamos con materiales (por ejemplo, con “polígonos” o “poliedros” de plástico), en cierta forma “manipulamos” y vemos los sistemas de signos matemáticos, pero no los conceptos matemáticos, que son intangibles e invisibles. Es una idea errónea pensar que los conceptos matemáticos, incluso los figurales, están plasmados, reflejados o cristalizados en el material tangible. Los objetos que investiga y manipula el razonamiento geométrico son entidades mentales que Fischbein[5] denomina *conceptos figurales*, los cuales “reflejan propiedades espaciales (forma, posición y magnitud), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales, como idealidad, abstracción, generalidad y perfección” (p. 143).

[5] Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24: 139-162.

Ejemplo

El borde de una cara de una moneda, o de la esfera de un reloj NO es una circunferencia, aunque solemos decir "este borde tiene forma de circunferencia"

La circunferencia es un objeto matemático idealizado que no existe en el mundo real. Es una abstracción o generalidad que surge cuando encontramos muchos ejemplos de formas tales como ruedas, relojes, mesas, camilla, etc.

Matemáticamente se define como "el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de uno fijo", o el conjunto de pares de números reales que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. Posiblemente si comprobamos esta propiedad en cada uno de los ejemplos anteriores nunca se cumple con exactitud, aunque sí de una forma aproximada.

En el ejemplo anterior, sin embargo, hablamos de "circunferencia" para referirnos a estas múltiples formas y también en frases como "el área interior de la circunferencia", "longitud de la circunferencia", "polígono inscrito a la circunferencia", etc.

Por tanto la expresión "concepto de circunferencia" es signo de un sistema de prácticas actuativas y discursivas asociada a cierta clase de situaciones problemáticas o descripciones del entorno tal como ya hemos comentado en el capítulo 1. Los objetos matemáticos (técnicas y estructuras conceptuales) provienen de sistemas de prácticas ante tipos de tareas, y no sólo por abstracción empírica de cualidades de objetos ostensivos[6].

Ejemplo

Si sólo consideramos el "cuadrado" como el concepto geométrico que resulta por abstracción empírica de cualidades de objetos ostensivos que podemos encontrar en nuestro entorno, entenderemos el cuadrado como la figura formada por cuatro lados iguales y con los cuatro ángulos de 90º, pero no podemos entender el "cuadrado" como "construcción geométrica" ni podemos construir el cuadrado a partir de la diagonal o bien a partir del lado. En cambio si manipulamos con un programa informático como el Cabri y realizamos las siguientes construcciones: 1) construcción de un cuadrado a partir de un lado y 2) construcción de un cuadrado a partir de la diagonal el alumno, por una parte, puede aprender y generalizar dos métodos de construcción de cuadrados y, por otra parte, el concepto de cuadrado que tiene el alumno queda enriquecido con la visión de que un cuadrado es el resultado de una construcción geométrica. Así mismo, en el contexto de la "geometría de la tortuga" (lenguaje Logo), la expresión REPITE 4 [AV 30 GD 90] es un cuadrado.

15. Con relación a los conceptos de "recta", "ángulo", "medida" analiza la diferencia entre el uso que se hace de estas palabras al trabajar con un material manipulativo o en la vida cotidiana y escolar, y el significado matemático de los términos.

Parte del problema señalado se explica porque con un mismo término del lenguaje nos referimos con frecuencia, tanto a objetos matemáticos abstractos, como a las situaciones concretas modelizadas por dicho concepto. Así, en la clase de matemática, y en los manuales escolares encontramos expresiones tales como:

"Dibuja una recta, un ángulo, recorta un triángulo, muéstrame un plano, etc."

Como entidades abstractas que son, parece obvio que no se puede dibujar una recta o un ángulo. Lo que el alumno dibuja para realizar estas tareas es un trazo (objeto ostensivo

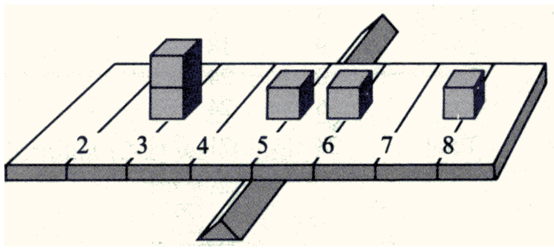
[6] Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 14, nº 3: 325-355.

manipulable) que evoca o simboliza el concepto de recta, ángulo (objeto abstracto) correspondiente:

- La recta, como entidad matemática, es ilimitada y carece de espesor, no así los dibujos y representaciones gráficas que se hacen de ella.
- Del mismo modo, un triángulo no es una pieza de material de una forma especial, ni una imagen dibujada sobre el papel. Es una forma controlada por su definición.

En consecuencia, un uso irreflexivo del material manipulativo podría constituir obstáculos para la apropiación efectiva del conocimiento matemático:

- Las acciones matemáticas son virtuales, imaginadas, no reales. Son acciones sobre objetos mentales, "materializados" mediante sistemas de signos específicos.
- El lenguaje y la práctica escolar pueden llevar a confundir entre las propiedades concretas del material manipulativo y los objetos matemáticos que modelizan dichas propiedades. Ello puede impregnar a los objetos matemáticos de unas connotaciones tangibles y visuales de las que progresivamente los alumnos deben desprenderse en los niveles superiores de enseñanza.
- Al mismo tiempo, las manipulaciones puramente sintácticas y formalistas de los sistemas de signos verbales-textuales pueden ocasionar un aprendizaje memorístico, rutinario, desprovisto de sentido para los alumnos.
- Si no se es cuidadoso en separar el material manipulativo del objeto abstracto, el paso de la acción física directa sobre material tangible a la acción imaginada, apoyada en sistemas de signos, puede estar no exento de conflictos.



16. Un tipo de material manipulativo usado para hacer comprensible la idea de media aritmética es una balanza, donde los datos se representan como pesos situados en diferentes posiciones de un tablero (cada dato se sitúa en la posición que indica su valor numérico) y la media es el punto de equilibrio de la balanza (en el ejemplo, el valor 5). ¿Qué conflictos piensas se podrían producir por un uso inadecuado de este material?

4.4. Relación de los manipulativos con las situaciones didácticas

El uso del material debe permitir el planteamiento de problemas significativos para los estudiantes, que puedan ser asumidos por ellos, apropiados a su nivel e intereses, y pongan en juego los conceptos, procedimientos y actitudes buscadas. El material en sí es inerte, tanto si es tangible como gráfico-textual, y puede ser usado incluso de forma indeseable. Los aparatos físicos, ni tampoco los restantes manipulativos, ofrecen experiencia matemática inmediata en sí mismos. La actividad matemática se pone en juego por las personas enfrentadas a tareas que les resultan problemáticas.

Por tanto, lo que se debe considerar como recurso didáctico no es el material concreto o visual, sino la situación didáctica integral, que atiende tanto a la práctica como al discurso, de la que emergen las técnicas y estructuras conceptuales matemáticas.

Ejemplos

> Un juego de ruletas puede usarse para trabajar el tema de la probabilidad; para estudiar la idea de sector circular y amplitud y medir diferentes amplitudes, o bien simplemente para hacer un sorteo de un premio en clase, pero sin conectarlo con la clase de probabilidad.
>
> Una calculadora puede usarse sólo para comprobar las operaciones realizadas primero con papel y lápiz, o bien como ayuda en el cálculo mental, o incluso para plantear la idea de redondeo, error absoluto y relativo.

En consecuencia el estudio de las matemáticas requiere enfrentar al alumno a problemas o tareas cuya solución son los conocimientos matemáticos pretendidos. Esta confrontación con situaciones-problemas, inductora de la actividad de matematización, contribuirá, además, a su formación integral como persona, objetivo final del proceso educativo.

Es importante también que el uso del material, no comprometa toda la atención de los alumnos, desplazando la propia reflexión matemática. Usar manipulativos tangibles en la enseñanza de las matemáticas es siempre un medio para un fin, nunca un fin en sí mismo.

Con frecuencia se defiende el uso de distintos sistema de representación para el aprendizaje significativo de las matemáticas, incluyendo las representaciones con material tangible. Pero como afirma Baroody[7], "desafortunadamente, no hay aún evidencia suficiente disponible para determinar qué modos de presentación son cruciales y qué secuencia de representaciones deberían usarse antes de introducir las representaciones simbólicas" (p. 5). Pensemos, por ejemplo, en la enseñanza a personas invidentes, las cuales pueden aprender cualquier contenido matemático sin el recurso a la percepción visual.

El juego de representaciones puede ser una condición necesaria, pero no suficiente para el aprendizaje matemático. La eficacia relativa de cada sistema de signos desde el punto de vista instrumental nos debe llevar a descartar algunos de estos sistemas y concentrar los esfuerzos en el dominio de herramientas con perspectivas de futuro.

Ejemplo

> El ábaco japonés, por ejemplo, es un instrumento de cálculo de extraordinaria eficacia para realizar cálculos aritméticos; compite incluso, una vez adquirida cierta destreza, con el uso de la calculadora. Pero se duda de su valor como recurso didáctico en los primeros niveles de enseñanza debido a sus convenciones particulares de representación de los números y la complejidad de su manipulación. Incluso el uso del ábaco ordinario, aunque es una herramienta excelente y útil, está lejos de ser el remedio para las dificultades de la enseñanza y aprendizaje de la aritmética. "Es más que dudoso, por ejemplo, que el ábaco sea el mejor modelo -o siquiera bueno- para el aprendizaje de la multiplicación o la división"[8].

El uso del material dentro de una secuencia de situaciones didácticas por parte de los profesores debe estar basado en la reflexión sobre las siguientes preguntas:

- ¿Qué aprenden los alumnos tras un proceso de estudio basado en el uso de un material determinado?
- ¿De qué factores depende el estudio?

---

[7] Baroody, A. J. (1989). Manipulatives don't come with garantees. *Arithmetic Teacher* (October): 4-5.

[8] Hernan, F. y Carrillo, E. (1988). *Recursos en el aula de matemáticas.* Madrid: Síntesis. (p. 60).

- ¿Podemos aspirar en los niveles de educación obligatoria a que los alumnos adquieran determinadas destrezas en el manejo de sistemas de signos textuales?
- ¿Cuándo y de qué modo dejar de usar material tangible y pasar al textual?

5. RECURSOS TECNOLÓGICOS

Diversas investigaciones están demostrando que los estudiantes pueden aprender más matemáticas y de manera más profunda con el uso de una tecnología apropiada. Hay que tener en cuenta, no obstante, que la tecnología no se debería usar como sustituto de intuiciones y comprensiones básicas; al contrario, deberá enfocarse de manera que estimule y favorezca tales intuiciones y comprensiones más sólidas. Los recursos tecnológicos se deben usar de manera amplia y responsable, con el fin de enriquecer el aprendizaje matemático de los estudiantes.

La existencia, versatilidad y potencia de la tecnología hace posible y necesario replantearse qué matemáticas deberían aprender los estudiantes, y cómo deberían aprender mejor. Pueden aparecer también algunas dificultades:

- Dificultades de aprendizaje del software o la calculadora si el alumno no está familiarizado con el mismo. Ello puede ocasionar que el tiempo, ya limitado, para la enseñanza de la matemática se invierta en el aprendizaje de la tecnología. Por ello se recomienda usar recursos fácilmente manipulables que no añadan complejidad innecesaria a la actividad matemática.
- Dificultad en aceptar datos de la calculadora u ordenador que no han obtenido personalmente. Por ejemplo, algunos alumnos se resisten a tomar como aleatorios los números obtenidos de una calculadora u ordenador, puesto que estos instrumentos siempre producen un resultado exacto y esto contradice la idea de aleatoriedad.
- Dificultad en diferenciar la estimación que proporciona la calculadora u ordenador del verdadero valor teórico; por ejemplo, en probabilidad, dificultad en diferenciar la estimación frecuencial de la probabilidad, obtenida mediante la tecnología del verdadero valor teórico de la probabilidad; en el estudio de las funciones, dificultad en distinguir el límite teórico de una estimación discreta del mismo; en general dificultad de diferenciar lo discreto y lo continuo al trabajar con la tecnología.

5.1. Calculadoras

Las calculadoras y los ordenadores se consideran actualmente como herramientas esenciales para la enseñanza, el aprendizaje y la construcción de las matemáticas. "La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y favorece el aprendizaje de los estudiantes" (NCTM, 2000).

Estos recursos han reducido muchas horas dedicadas al cálculo, permitiendo dedicar más tiempo a tareas interpretativas y eliminando temas, como el cálculo de logaritmos a los que se destinaba mucho tiempo hace unos años.

5.2. Ordenadores

Han sido principalmente los ordenadores los que están cambiando la manera de enseñar matemáticas, debido principalmente a la revolución que hizo que los ordenadores estuvieran a disposición de un mayor número de usuarios, y al desarrollo del lenguaje natural en el manejo del software que hizo accesible su uso.

Los programas de ordenador proporcionan imágenes visuales que evocan nociones matemáticas, facilitan la organización, el análisis de los datos, la graficación y el cálculo de manera eficiente y precisa. Pueden apoyar la investigación de los propios estudiantes en las distintas áreas de matemáticas: geometría, estadística, álgebra, medida y sistemas numéricos. Cuando proporcionamos herramientas tecnológicas, los estudiantes pueden centrarse en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas.

La gran ventaja de los ordenadores es su naturaleza dinámica, su velocidad, y el creciente rango de software que soportan. De esta manera, permiten a los estudiantes experimentar y explorar todos los aspectos de la matemática y tienen oportunidad de poder trabajar sobre preguntas de investigación reales, las cuales brindan mayor interés. Podemos diferenciar los siguientes tipos de software para la enseñanza:

1. *Lenguajes de programación.* En las primeras experiencias de enseñanza, una opción era que los alumnos escribieran sus propios programas de ordenador, por ejemplo en lenguaje LOGO. Esta opción hoy día apenas se usa, aunque todavía encontramos en Internet algunos micro-programas interactivos similares a LOGO.
2. *Paquetes profesionales*. Existe una gran variedad de ellos, como por ejemplo *SPSS, o Mathematica,* tan sólo se usan en la universidad y en pocos casos en los últimos cursos de enseñanza secundaria.
3. *Software didáctico.* Debido a la complejidad de los programas profesionales algunos investigadores han realizado adaptaciones de ellos a lo que generalmente se requiere en la clase o han construido su propio paquete didáctico. Un ejemplo es *Fathom*, un medio de aprendizaje para análisis exploratorio de datos y álgebra, y se utiliza en secundaria que incluye manipulación dinámica de diversas representaciones, permite trazar gráficos de puntos, de barras, trazar funciones e importar datos desde Internet. Otro ejemplo es el programa *Clic* que se usa fundamentalmente para diseñar paquetes educativos para la etapa de educación primaria.
4. *Micromundos*. Estos consisten en grupos de programas que sirven para estudiar conceptos particulares. Ejemplos particulares son muchos de los programas interactivos preparados con relación a los estándares del NCTM y que están disponibles en Internet. Entre estos micromundos destaca el programa Cabri que está especialmente pesnsado para su aplicación a la geometrías
5. *Software de uso general*, como por ejemplo las hojas de cálculo, *EXCEL, LOTUS*, etc, que son aplicadas en diversas experiencias de clase y brindan un amplio espectro de posibilidades en la enseñanza de conceptos estadísticos, proporcionalidad, o funciones.

Los programas informáticos llamados de "propósito general" como los procesadores de texto, hojas de cálculo, etc. son programas que están disponibles en casi todos los ordenadores y que pueden ser muy útiles para trabajar diferentes contenidos matemáticos. Por ejemplo con el programa WORD o con el PAINT podemos trabajar contenidos geométricos como los frisos y mosaicos, mientras que con la hoja de cálculo podemos trabajar aritmética, estadística y probabilidad.

Con relación a la hoja de cálculo hay que destacar los siguientes aspectos: 1) Permite la representación de la información en formato numérico y gráfico y en un formato semialgébrico -si se utilizan fórmulas. 2) La interacción del alumno con una hoja de cálculo le obliga a ser preciso y metódico, 3) La hoja de cálculo produce una variación en "tiempo real". Cada una de las acciones y decisiones que realiza el alumno tienen una respuesta inmediata en la pantalla del ordenador. 4) La hoja de cálculo asume la realización de cálculos matemáticos que pueden ser complicados o "pesados" para el alumno, y le permite dedicar sus esfuerzos a otros objetivos.

6. *Tutoriales*, que son programas desarrollados para la enseñanza personalizada de los estudiantes y para la evaluación.

5.3. Internet

El enorme potencial de esta tecnología y la rapidez con que su uso se está generalizando es especialmente visible en la educación. Destacan entre otras las siguientes posibilidades:

- *Correo electrónico:* que permite enviar y recibir mensajes a través del ordenador y los sistemas de comunicación asociados. Puesto que los mensajes pueden contener documentos de texto o gráficos u otro material informático adosados, posibilita la tutoría a distancia y el trabajo conjunto de profesor y alumnos o varios alumnos, incluso a distancia
- *Listas de distribución y discusión* por correo electrónico, que permiten enviar un mismo mensaje a toda una lista de personas en forma instantánea y podemos utilizar tanto con nuestros alumnos como para intercambiar ideas o soluciones a problemas con otros profesores.
- *Sociedades:* El numero de asociaciones educativas y de profesores de matemáticas que construyen sus propias páginas, con información sobre sus actividades y desde las cuales podemos acceder a recursos útiles para la enseñanza de las matemáticas, es cada día creciente.
- *Revistas y boletines:* la revista electrónica constituye una nueva filosofía en la difusión del conocimiento. Por un lado, acorta todo el proceso desde que se remite un trabajo hasta que se publica, y la difusión es potencialmente mucho mayor, pues no hay costes de distribución implicados, por lo que, generalmente, estas revistas se distribuyen libre de coste. No sólo encontramos revistas para los profesores de matemáticas, sino también para los alumnos.
- *Software:* También hay software disponible en Internet y algunos programas pueden cargarse directamente o bien ser solicitados a través de correo electrónico. En otros casos podemos usar cierto software "a distancia". De este modo, Internet suprime las barreras de compatibilidad o de limitaciones de memoria y pone a nuestra disposición el uso "on-line" de otros medios informáticos.
- *Otros recursos didácticos*: incluyen, conjuntos de datos para el trabajo en la clase de estadística, juegos y pasatiempos matemáticos, libros de texto interactivos, notas sobre historia de las matemáticas, etc.

5.4 Video

Actualmente se pueden encontrar videos didácticos que tratan muchos de los contenidos matemáticos de la educación primaria -por ejemplo, la colección *Ojo Matemático*. Si bien el video permite tratar los contenidos de una manera muy diferente a como lo hace un libro de texto puede resultar una actividad muy pasiva para los alumnos. Algunos consejos generales que conviene tener en cuenta son:

1) Antes de llevarlo al aula, hay que determinar qué parte se va a usar, por qué y para qué. Se necesita verlo completo para determinar qué segmentos son adecuados para los alumnos.
2) No hay que caer en la tentación de querer proyectar todo el video en una sola sesión. Los chicos no tienen la misma retentiva que los adultos, o la que desarrollan cuando van al cine. No hay que sustituir la clase con un video, sino que hay que aprovechar partes del mismo para enriquecer la enseñanza.
3) Hay que diseñar actividades que permitan a los estudiantes estar atentos antes, durante y después de ver el segmento del video.
4) No es conveniente apagar las luces.

6. JUEGOS

Otro recurso que conviene tener presente son los juegos, sobretodo por su papel motivador. Una de las clasificaciones sobre los juegos es la que considera por una parte los juegos de conocimiento en los que hay que poner en funcionamiento un determinado contenido matemático de la enseñanza primaria y, por otra parte, los juegos de estrategia en los que hay que encontrar la estrategia que permite ganar el juego

> 17. Clasifica los juegos siguientes como juegos de conocimiento o de estrategia. Para cada uno de ellos comenta el conocimiento que hay que poner en funcionamiento o la estrategia ganadora.
> - Escondite
> - Parchís
> - La carrera del 20. Se trata de un juego de dos jugadores en el que el jugador que empieza jugando debe decir un número menor que 20 y el contrincante debe decir un número 1 o 2 unidades mayor. Gana el jugador que dice 20 por primera vez[9].

7. DOS POSICIONES EXTREMAS: FORMALISMO Y EMPIRISMO

Los análisis de la actividad matemática llevados a cabo por distintos autores sugieren el importante papel de los medios expresivos para el desempeño de tal actividad, la cual, aunque es esencialmente mental, se apoya en la acción sobre tales instrumentos semióticos. Estos análisis apoyarían, por tanto, el uso de materiales manipulativos tangibles en los primeros niveles de enseñanza siempre que tales recursos sirvieran de apoyo ostensivo para la reflexión matemática y no la limiten.

En las secciones anteriores hemos enfatizado una cierta precaución respecto del uso ingenuo de los manipulativos tangibles. Pero esa actitud es igualmente aplicable

[9] Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE-Horsori (p. 222).

respecto del uso de los manipulativos gráfico-textuales. En general el empleo de los instrumentos semióticos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas puede caer en dos posiciones extremas:

- *el formalismo*, consistente en un uso exclusivo y prematuro de símbolos formales - con la consiguiente pérdida por parte del alumno del significado fenomenológico de la actividad matemática (conexión con las situaciones- problemas);
- *el empirismo*, esto es, el uso abusivo de materiales tangibles, incluso cuando ya la edad y comprensión del alumno no los hace necesarios, con la consiguiente pérdida del sentido discursivo de la actividad matemática (conexión con la actividad de generalización y abstracción) .

Para superar ambos sesgos se requiere implementar una dialéctica compleja entre los distintos tipos de símbolos y materiales ostensivos que promueva la actividad reflexiva del alumno. Esto precisa un gran esfuerzo de investigación para dilucidar qué materiales usar, cuándo, cómo, con quién, así como sobre las conexiones que se deberían establecer entre los manipulativos tangibles, orales y gráfico-textuales, entre las técnicas y estructuras conceptuales matemáticas y las situaciones-problemas que resuelven y organizan tales estructuras.

C: Seminario didáctico

1. ANÁLISIS DE DOCUMENTOS CURRICULARES

(1) A continuación se presenta un extracto de un documento curricular sobre el uso de recursos en el aprendizaje significativo de las matemáticas.

1) Léelo con atención. Subraya los puntos que consideras especialmente acertados.
2) ¿Qué papel juega el uso de recursos en el aprendizaje significativo según este documento?

Extracto del documento: Recursos didácticos para la enseñanza de las matemáticas en primaria (MEC)

Señalamos a continuación algunos **aspectos que favorecen el aprendizaje significativo:**

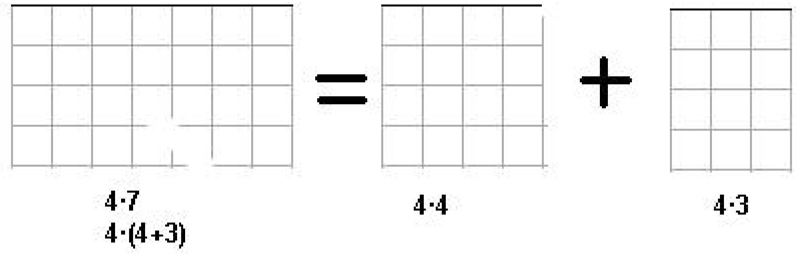
* Atiende a la diversidad del alumnado, tanto en sus experiencias previas y sus estrategias personales de aprendizaje como en sus capacidades, ya que la actividad puede abordarse de maneras distintas: pueden hacerlo de forma verbal, otros de forma manipulativa o gráfica, etc. La participación de cada niño en la elaboración de conjeturas y la verbalización garantizan la diversidad de enfoques y de lenguajes.
* Plantea un aprendizaje funcional y significativo al considerar la conveniencia de partir de los intereses de los niños y las niñas, y de situaciones reales para establecer relaciones con sus conocimientos anteriores y elaborar conjuntamente definiciones y generalizaciones.
* Permite también integrar conceptos, procedimientos y actitudes en una misma secuencia de aprendizaje, ya que, a través de procedimientos, es decir de “hacer” alguna cosa, ya sea contar, clasificar, representar, etc., se llega a sacar conclusiones y a generalizar, y con ello a los conceptos; sin olvidar que las actitudes de participación, gusto por el trabajo, por la precisión, etc., se adquieren simultáneamente.

Difícilmente se pueden garantizar estas condiciones en una secuencia en la que se empieza por la definición, se pasa a exponer algunos ejemplos y después se presentan ejercicios para practicar. Éste es un planteamiento que, por desgracia, es muy frecuente todavía en nuestras escuelas, y que sólo garantiza la uniformidad, que relaciona poco o nada los aprendizajes con las situaciones de la vida diaria y que fomenta actitudes muy negativas frente a la matemática.

2. ANÁLISIS DE ACTIVIDADES Y LIBROS DE TEXTO

(2) Examina en un libro de texto de primaria si se incluyen actividades que requieran el empleo de materiales manipulativos.

(3). En una clase la maestra ha utilizado papel cuadriculado de la siguiente manera:



¿Qué contenido matemático se está trabajando en esta actividad?

(4) Explica como y con qué material justificarías a un alumno de primaria la propiedad asociativa $2\cdot (3\cdot 5) = (2\cdot 3)\cdot 5$

(5) Utilizando el plegado de papel:

a) Trazar la perpendicular por un punto A a una recta r.

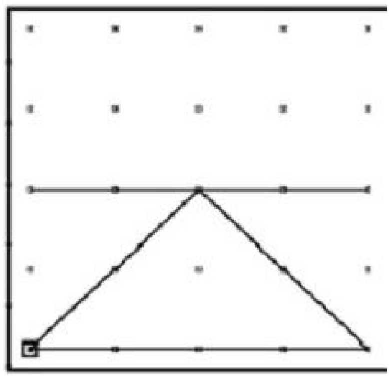
b) Trazar la paralela por un punto A a una recta r.

c) Trazar la bisectriz de un ángulo.

d) Construir un pentágono regular.

(6) ¿Cuál es el objetivo de la siguiente actividad?¿Crees que el uso del geoplano permite realizar esta actividad en el primer ciclo de primaria?

En un geoplano de 5x5 construye el triángulo de la siguiente figura y su simétrico respecto de la línea horizontal



(7) En un libro de texto se propone el siguiente método para dibujar un diagrama de sectores.

a) Explica por qué este procedimiento es correcto.

b) Explica cómo se puede determinar el centro del círculo

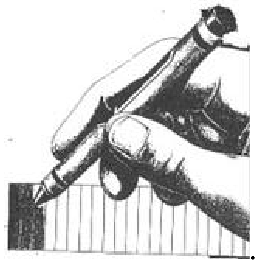
c) Busca en un libro de texto el procedimiento normal para dibujar un diagrama de sectores. ¿Qué tipo de contenido matemático se evita utilizando este procedimiento?

d) ¿Qué tipo de material se evita utilizando este procedimiento?

Para dibujar un gráfico de sectores para esta tabla de datos, has de seguir los pasos siguientes:

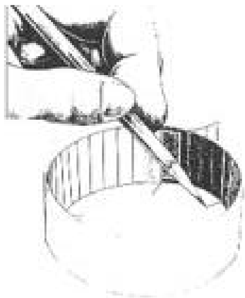
Edad	*Frecuencia absoluta*
7	*3*
8	*2*
9	*3*
10	*4*
11	*6*
12	*2*
Total	*20*

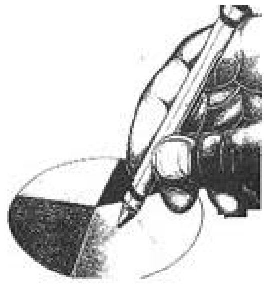
1) Coge una tira de cartulina de 24 cm de largo por 5 cm de alto. Dibuja 20 rectángulos de base 1 cm. A continuación pinta 3 de color azul, 2 de color verde, 3 de color amarillo, 4 de color negro, 6 de color rojo y 2 de color marrón.



2) Une con pegamento los extremos de la tira de cartulina, de manera que los 4 rectángulos sin colorear queden por detrás de los segmentos coloreados y la tira forme un anillo con los colores hacia adentro.

3) En una hoja se traza una circunferencia utilizando la tira del apartado anterior. Marca el principio y el final de cada color





4) Determina el centro de la circunferencia y une las marcas con el centro. Por último colorea cada sector con el color correspondiente.

3. EL MATERIAL MANIPULATIVO COMO PUENTE ENTRE LA REALIDAD Y LOS OBJETOS MATEMÁTICOS[10]

(8) A continuación tienes una secuencia de actividades que permite modelizar una situación "real". El modelo matemático se corresponde con el currículum de la ESO, pero la utilización de un programa de geometría dinámico como el Cabri permite considerar la posibilidad de utilizar esta secuencia de actividades con alumnos de primaria. Después de leer las actividades y de pensar cómo las podría resolver un alumno de primaria, contesta:

a) ¿Qué situación "real" se está modelizando?

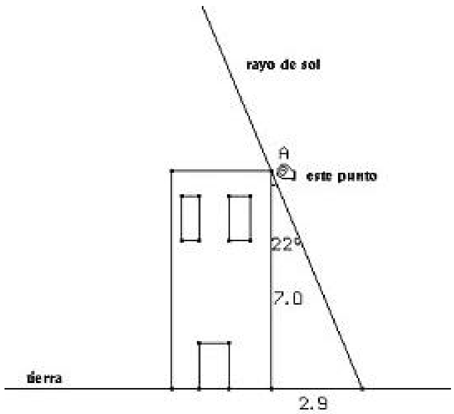
b) ¿Qué contenido matemático sirve para modelizar está situación "real"?

c) El contenido del apartado anterior, ¿con qué notación se representa en la ESO?

d) ¿Es adecuado introducir el contenido del apartado b en primaria? ¿Y la notación que lo representa en la ESO?

e) ¿Crees que la secuencia de actividades que sigue es apropiada para alumnos de 6º de primaria?

1. La figura de la pantalla del ordenador es un edificio de 7 m de altura que tiene una sombra de 2,9 m. Si sitúas el puntero del ratón en el punto A y lo mueves hacia arriba y hacia abajo, observarás cómo aumenta o disminuye la altura del edificio. ¿Qué le ocurre a la sombra del edificio al aumentar su altura? ¿Y si disminuye la altura?



2. La figura anterior nos permite observar la sombra que tienen, a la misma hora, edificios de alturas diferentes.

a) Completa la siguiente tabla:

Altura (m)	Sombra (m)
4	
8	
12	
16	

b) Si doblamos la altura de un edificio, ¿qué le pasa a su sombra? ¿Y si la triplicamos? ¿Y si la cuadriplicamos?

---

[10] Font, V. (1996). *Incidencia del micro-mundo Cabri-géomètre en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad de magnitudes. Un ejemplo de su utilización en el aula.* (Comunicación presentada en el ICME-8, Sevilla).

d) Divide cada altura por su sombra. ¿Observas alguna relación entre las alturas de los edificios y sus sombras?

e) Variando la posición del punto A de la pantalla anterior, resuelve el siguiente problema: " Juana ha medido, a la misma hora, algunos objetos (árboles, edificios, monumentos, etc.) y sus sombras, pero no ha tenido tiempo de hacer todas las mediciones. Completa la tabla de Juana."

Altura de los objetos (m)	Sombras (m)
3,5	....
7	2,9
....	5,8
21	8,7

4. CALCULADORAS

(9) Describir algunos de los beneficios de usar calculadoras en las clases de matemáticas. ¿Cuáles son algunos de los argumentos que suelen decirse en contra del uso de calculadoras en la enseñanza de la aritmética?

(10) Después de efectuar las siguientes restas con la calculadora: 9-1, 98-21, 987-321, 9876-4321, 98765-54321, haz una predicción del resultado de las restas 987654-654321 y 9876543-7654321 y da una justificación de esta predicción.

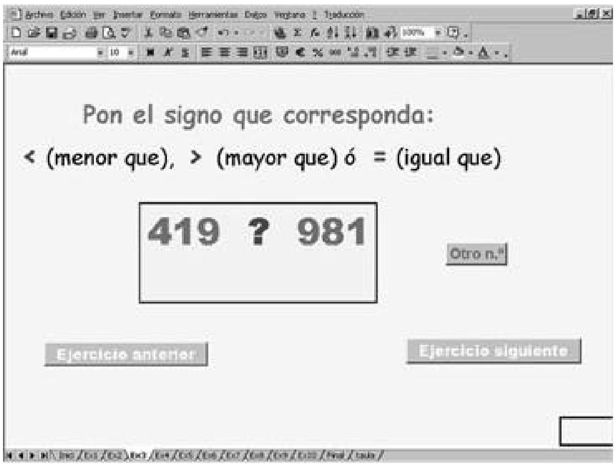
(11) Las calculadoras tienen posibilidades que podríamos calificar como "lúdicas" o "curiosidades". Un ejemplo lo tenemos en actividades como la siguiente en las que la última respuesta se obtiene girando 180º el resultado de la pantalla de la calculadora a la pregunta anterior:

> *Un camión que transporta 1725,23 kg de naranjas, ha perdido 16,5 kg por el camino. ¿Cuántos kg de naranjas tiene aún el camión? ¿Qué es imprescindible para escribir esta respuesta?*

5. PROGRAMAS INFORMÁTICOS

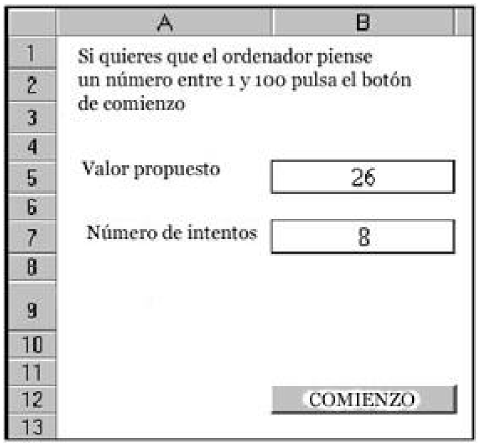
(12) Estudia estas actividades basadas en el uso de una Hoja de Cálculo desde la perspectiva del maestro: ciclo, objetivo, contenidos, etc. Explica las ventajas de utilizar la hoja de cálculo en lugar de hacer el ejercicio con lápiz y papel.

1) *Aritmética*. En la hoja de cálculo que sigue el alumno ha de escoger entre tres posibilidades. Si escoge la correcta el ordenador contesta Muy Bien. Si la elección no es la correcta el ordenador contesta que vuelva a intentarlo. Con el botón *Otro n.º* el ordenador propone la misma actividad con números diferentes. Las opciones *Ejercicio anterior y siguiente* permiten pasar a actividades más fáciles o más difíciles.



2) *Cálculo mental:* En la hoja de cálculo que sigue el alumno ha de escoger un número entre 1 y 100. Si este número coincide con el que ha pensado el ordenador recibe la siguiente respuesta: Has acertado. Si el número es menor o mayor el ordenador responde indicándolo. El ordenador también cuenta los intentos. Con el botón *Inicio* el ordenador propone la misma actividad con números diferentes.

Comenta esta actividad desde la perspectiva del maestro: ciclo, objetivo, contenidos, etc. Explica las ventajas e inconvenientes de utilizar la hoja de cálculo en lugar de hacer este juego sólo con cálculo mental. ¿Cuál es la estrategia que hay que seguir?



3) Confecciona una hoja de cálculo que permita rsolver por tanteo el problema propuesto en la actividad 10

6. INTERNET

(13) Visita las siguientes páginas web y explora los recursos disponibles para la enseñanza de las matemáticas en primaria:

http://www.pangea.org/~acte/sebas/Volta%20Espanya/castella.htm

http://matti.usu.edu/nlvm/nav/vlibrary.html

http://illuminations.nctm.org/index2.html

(14) Busca en Internet páginas que tienen por objetivo el intercambio por Internet de problemas de matemáticas entre escuelas, el aprendizaje cooperativo, etc.

BIBLIOGRAFÍA

Corbalán, F. y Deulofeu, J. (1996). Juegos manipulativos en la enseñanza de las matemáticas. *UNO*, 7, 71-80.

Coriat, M. (2001). Materiales didácticos y recursos. En, E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 61-82). Madrid: Síntesis.

Hernan, F. y Carrillo, E. (1988). *Recursos en el aula de matemáticas*. Madrid: Síntesis.

Llinares, S. y Sánchez, M. V. (1998). Aprender a enseñar matemáticas: Los videos como instrumento metodológico en la formación inicial de profesores. *Revista de Enseñanza Universitaria*, 13, 29-44.

Cascallana, M.T. (1988). *Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos*. Madrid: Santillana.

Marín, M., España, A. y Cruz, C. (1994). Telematemáticas. *Suma*, 14-15, 65-68.

Udina, F. (1989): *Aritmética y calculadora*. Madrid: Síntesis